VLAD IONESCU

SINTEZA STRUCTURALĂ A SISTEMELOR LINIARE

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZA STRUCTURALĂ
A
SISTEMELOR LINIARE

de

prof. dr. ing. VLAD IONESCU

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREȘTI — 1979

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Introducere 7

Capitolul **1. Reprezentări de stare** 11

1.1. Sisteme liniare. Considerații generale 11
1.2. Controlabilitate. Observabilitate 15
1.3. Lege de comandă 16
1.4. Forme canonice 17
1.5. Stabilitate și stabilizare 20
1.6. Estimatori 20
Bibliografie 23

Capitolul **2. Reprezentarea polinomială a sistemelor** 25

2.1. Reprezentări polinomiale de stare 25
2.2. Reprezentări polinomiale de stare parțială 29
2.3. Controlabilitatea la ieșire 48
Bibliografie 50

Capitolul **3. Sinteza regulatoarelor liniare** 51

3.1. Stabilizarea prin reacție după stare. Estimatorul 51
3.2. Stabilizarea prin compensare 63
3.3. Problema reglării și urmăririi 71
Bibliografie 83

Capitolul **4. Inversarea sistemelor liniare** 85

4.1. Caracterizarea imaginii. Reproductorul. 85
4.2. Caracterizarea nucleului. Nulorul 96
4.3. Reproductorul standard 100
Bibliografie 111

Capitolul **5. Sinteza exactă a sistemelor liniare** 113

5.1. Sinteza exactă prin compensare serie 113
5.2. Soluția minimală în compensarea serie 116
5.3. Polii ficși ai sintezei exacte 121
5.4. Sinteza exactă și estimarea stărilor 128
5.5. Sinteza exactă în circuit închis 135
Bibliografie 147

Capitolul **6. Decuplarea sistemelor liniare** 149

6.1. Problema decuplării 149
6.2. Cazuri particulare ale problemei decuplării 152

Scanned with OKEN Scanner

6.3. Stabilizarea decuplării în circuit deschis 155
6.4. Decuplarea și alocarea polilor în circuit închis 157
6.5. Decuplarea prin reacție după stare 171

Bibliografie 180

Anexe. Elemente de algebră 181

A.1. Elemente de teoria structurilor algebrice 181
A.2. Teoria matricilor polinomiale și a matricilor raționale 195
A.3. Elemente de teoria subspațiilor invariante și a reprezentărilor canonice 223

Bibliografie 240

Structural synthesis of liniar systems 241

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă îşi propune să prezinte principalele aspecte conceptuale şi procedurale ale sintezei sistemelor liniare, privită din punct de vedere structural, adică al evidenţierii şi investigării acelor elemente care sînt determinante în reflectarea la nivel structural a specificaţiilor de proiectare ale unui sistem.

Plecînd de la recunoaşterea unanimă a faptului că în ultimii ani au apărut o serie de lucrări care au fixat clar cadrul axiomatic şi operant al teoriei sistemelor, în această direcţie cercetarea sistemică românească evidenţiindu-se printr-un aport remarcabil, prezenta lucrare doreşte să se înscrie în contextul necesităţii apariţiei unor lucrări care să prezinte într-o manieră unitară problematica şi metodele (algoritmice) de proiectare sistemică, consecinţă firească a evidenţierii eficienţei aplicative a întregului arsenal teoretic acumulat.

Avînd în vedere această necesitate de principiu, lucrarea a încercat să satisfacă două deziderate, după opinia autorului, esenţiale : *a*) aparatul formal utilizat să fie cît mai natural legat de modul de formulare al problemelor de sinteză şi, *b*) dezvoltările teoretice să permită construcţii procedurale comod implementabile algoritmic. În ceea ce priveşte primul considerent, abordările formale s-au bazat pe reprezentarea polinomială a sistemelor, ca schemă de algebrizare derivată din reprezentările operaţionale (frecvenţionale) clasice, intim legate de tipologia majorităţii problemelor de sinteză exprimate de regulă în termeni intrare/ieşire. Referitor la cel de-al doilea considerent, toate rezultatele au fost stabilite constructiv, ceea ce a permis algoritmizarea operaţiilor de sinteză direct din demonstrarea acestor rezultate, precum şi legarea proprietăţilor teoretice de structură de implementarea procedurală a tehnicilor de proiectare sistemică.

Capitolul 1 trece în revistă succint, în formalismul reprezentărilor de stare, principalele rezultate devenite tradiţionale în teoria sistemelor liniare şi care în acelaşi timp facilitează cititorului înţelegerea transpunerii acestor rezultate în formalismul reprezentărilor polinomiale, ca bază de plecare în dezvoltările ulterioare din celelalte capitole ale cărţii.

Capitolul 2 abordează problematica generală a teoriei reprezentărilor polinomiale ale sistemelor. Se începe cu reprezentările polinomiale de stare obţinute din transpunerea operaţională directă a ecuaţiilor clasice de stare ale unui sistem, evidenţiindu-se echivalenţa noţiunilor de izomorfism şi de echivalenţă strictă, echivalenţă care statuează conexiunea care există între maniera operantă a algebrei liniare utilizată în cadrul reprezentărilor de stare, şi cea specifică inelului polinoamelor şi a corpului fracţiilor raţionale pe care este construită întreaga lucrare. Generalizarea firească a reprezentărilor polinomiale de stare o constituie reprezentările polinomiale de stare parţială ca entitate definitorie centrală a tuturor dezvoltărilor formale din lucrare. Prin introducerea, pentru prima dată în mod corect, a echivalentului de stare al unei reprezentări polinomiale de

Scanned with OKEN Scanner

stare parţială, a fost posibilă transferarea imediată a rezultatelor tradiţionale din limbajul variabilelor de stare în limbaj polinomial. În acest sens, s-a insistat asupra teoriei reprezentărilor şi echivalenţilor standard (controlabil respectiv observabil) care facilitează explicitarea semnificaţiei sistemice a procedurilor eminamente algebrice specifice teoriei matricilor polinomiale şi raţionale.

Capitolul 3 se ocupă cu sinteza regulatoarelor liniare. În acest scop sînt abordate în prealabil metodele de stabilizare prin estimator de lege de reacţie şi prin compensare după ieşire, utilizîndu-se ca instrument esenţial tehnica eliminantului asociat unei factorizări prime la dreapta (stînga), cu numitor coloană (linie) proprie, a unei matrici raţionale proprii. Această tehnică a fost studiată detaliat eliminîndu-se erorile de utilizare ale ei, erori întîlnite în lucrări recente care se ocupă de folosirea unei atare tehnici. Abordîndu-se în continuare problema sintezei regulatoarelor liniare, explicitată prin problema urmării (referinţei) şi reglării (invarierii la perturbaţii), s-a realizat o transpunere comodă, la nivelul reprezentărilor polinomiale, cu implicaţii procedurale imediate, a principiului modelului intern combinat cu tehnicile de stabilizare. Sînt evidenţiate în final diversele variante de robusteţe ale structurilor de reglare, capitolul furnizînd utilizatorului o procedură completă de sinteză a regulatoarelor liniare pentru procesele liniare multivariabile cele mai generale.

Capitolul 4 abordează într-o versiune originală problema inversării sistemelor liniare. Introducerea, în premieră, a noţiunii de reproductor a permis caracterizarea generală a imaginii şi nucleului unei matrici de transfer, iar prin particularizare la cazul matricilor de transfer inversabile la dreapta (stînga) s-a obţinut o descriere completă a clasei inverselor la dreapta (stînga) împreună cu localizarea şi construirea inverselor la dreapta (stînga) de ordin minim. Caracterizarea nucleului s-a făcut cu ajutorul noţiunii de nulor, componentă a reproductorului, noţiune care permite descrierea clasei intrărilor care nulează ieşirea unui sistem. Introducerea P-nulorului minimal a permis, aşa cum se va vedea în capitolul 6, rezolvarea problemelor legate de decuplarea sistemelor în circuit închis simultan cu alocarea polilor. Pentru studierea subclasei soluţiilor proprii a unei ecuaţii raţionale s-au introdus noţiunile de reproductor standard şi reproductor standard alocat. Cu ajutorul reproductorului standard au fost obţinute direct legile de comandă care simplifică zerourile unui sistem, respectiv care nulează ieşirea unui sistem simultan cu alocarea polilor sistemului rezultant, precum şi o procedură de construcţie a interactorului.

Problema sintezei exacte a sistemelor a fost abordată în *Capitolul 5*, utilizîndu-se esenţialmente rezultatele din capitolul 4 referitoare la reproductorul standard alocat, ceea ce a permis, după opinia autorului, o tratare completă a aspectelor actuale legate de sinteza exactă. În acest sens, a fost caracterizată complet clasa soluţiilor sintezei exacte, iar în cadrul acestei clase a fost investigată constructiv subclasa soluţiilor minimale. Prin punerea în evidenţă a polilor ficşi (interni şi externi) ai sintezei exacte a fost posibilă elaborarea unei proceduri de obţinere a soluţiilor stabile. În ultimul paragraf al capitolului a fost rezolvată problema sintezei exacte în circuit închis, împreună cu stabilirea în premieră a unei proceduri de obţinere a aşa-numitei realizări, de ordin minim, prin reacţie după stare în raport cu un sistem dat, ceea ce permite minimizarea dinamicii interne în procesul de implementare în circuit închis a soluţiilor

Scanned with OKEN Scanner

„serie" ale sintezei exacte. Ca o aplicație importantă a sintezei exacte, în cadrul capitolului, a fost abordată problema estimatorilor de lege de reacție, evidențiindu-se o serie de aspecte esențiale legate de aceștia cum ar fi minimalitatea, asignabilitatea etc.

Sinteza prin decuplare a fost tratată în *Capitolul 6*. Abordată într-o manieră nouă și anume ca soluție a unei probleme de compensare serie, problema decuplării a fost cercetată din punctul de vedere al următoarelor aspecte centrale : *a*) încadrarea clasei soluțiilor ; *b*) obținerea de majoranți eficienți ai extensiunii sistemului inițial care permit decuplarea în circuit închis simultan cu alocarea polilor ; *c*) obținerea de majoranți eficienți ai extensiunii sistemului inițial la care mai este posibilă decuplarea în circuit închis cu evidențierea în acest caz a polilor fiși ai decuplării. O serie de proceduri de decuplare, ilustrate pe exemple, pun în evidență o metodică unitară de proiectare a sistemelor decuplate, împreună cu specificitățile acestei metode în cazuri particulare uzuale de decuplare. Folosindu-se teoria interactorului din capitolul 4 au fost rezolvate problemele reprezentative ale decuplării prin reacție după stare, problemă care la nivel general a rămas nesoluționată pînă în prezent.

O atenție deosebită a fost acordată anexelor matematice. De menționat că anexa 2 reprezintă una din primele tratări unitare și complete ale teoriei matricilor polinomiale și rationale, dezvoltările făcute în această tratare fiind în esență rodul cercetării sistemice și nu al unei cercetări matematice în sine. De asemenea atît pentru înțelegerea unor probleme generale din lucrare, cît și pentru a pune la dispoziția cititorului un material unitar, eliberat de abstractități inutile dar cu aceeași eficiență teoretică și aplicativă, a fost redactată anexa 3 referitoare la teoria subspațiilor invariante.

În lucrare sînt inserate o serie de exemple care facilitează cititorului înțelegerea aplicării diferitelor metodologii și proceduri de sinteză sistemică.

Lucrarea se adresează cercetătorilor și inginerilor care lucrează în domeniul proiectării sistemelor și al conducerii prin calculator a proceselor industriale, fiind după opinia autorului un prim material care încearcă să acopere unitar laturile esențiale ale proiectării sistemice moderne. De asemenea, lucrarea este adresată doctoranzilor și studenților din învățămîntul de automatică și calculatoare în vederea întregirii cunoștințelor în domeniul atît de vast al științei sistemelor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

Reprezentări de stare

Capitolul de față își propune să treacă în revistă principalele rezultate, devenite în prezent clasice, din teoria sistemelor liniare *constante (invariante în timp)*.

Aceste rezultate se expun fără demonstrațiile respective, urmînd ca în capitolele următoare referirile la aceste rezultate să fie însoțite de demonstrații făcute în contextul abordărilor formale din capitolele respective.

1.1. SISTEME LINIARE. CONSIDERAȚII GENERALE

DEFINIȚIA 1.1. Tripletul (A, B, C) unde A, B, C, sînt $n \times n$, $n \times m$, $p \times m$ matrici respectiv, asociat ecuațiilor

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.2}$$

$t \in \mathbb{R}$, respectiv ecuațiilor

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k) \tag{1.3}$$

$$y(k) = C\,x(k) \tag{1.4}$$

$k \in Z$, unde $u(t)$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(t)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(t)$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ sînt comanda, starea și respectiv ieșirea, poartă numele de sistem liniar continuu, respectiv discret.

Soluția lui (1.1) se scrie

$$x(t) = \Phi(t-t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.5}$$

unde

$$\Phi(t) \triangleq e^{At} \tag{1.6}$$

este matricea fundamentală a sistemului continuu.

Soluția lui (1.3) se scrie:

$$x(k) = \Phi(k-k_0)\,x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k-i-1)Bu(i), \quad k \geq k_0, \tag{1.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\Phi(k) = A^k \tag{1.8}$$

este matricea fundamentală a sistemului discret.

Observația 1.1. $\Phi(t)$ definită prin (1.6) este nesingulară, oricare ar fi matricea A. $\Phi(k)$ definit prin (1.8) este nesingulară, dacă și numai dacă, A este nesingulară.

Fie $h > 0$ și $\{u(k) \mid k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ un șir în $\mathbb{R}^m$. Definim $\tilde{u}(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ prin

$$\tilde{u}(t) = u(k), \quad t \in [kh, (k+1)h). \tag{1.9}$$

Atunci, conform cu (1.5) orice soluție $\tilde{x}(.)$ corespunzătoare lui (1.9) satisface

$$\tilde{x}((k+1)h) = \Phi(h)\,\tilde{x}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} \Phi((k+1)h-\tau)B\tilde{u}(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \Phi(h)\,\tilde{x}(kh) + \int_0^h \Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, Bu(k). \tag{1.10}$$

Punînd

$$A^* \triangleq \Phi(h) \tag{1.11}$$

$$B^* \triangleq \int_0^h \Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, B \tag{1.12}$$

$$C^* \triangleq C \tag{1.13}$$

și

$$x(k) \triangleq x(kh) \tag{1.14}$$

$$y(k) \triangleq y(kh) = C\,x(kh) \tag{1.15}$$

rezultă din (1.10)

$$x(k+1) = A^*\,x(k) + B^*\,u(k) \tag{1.16}$$

$$y(k) = C^*\,x(k). \tag{1.17}$$

Tripletul (A^*, B^*, C^*) definit prin (1.11), (1.12) și (1.13) se numește *discretizantul* sistemului continuu (A, B, C). De observat că în acest caz A^* este nesingulară.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 1.2. Fie (A, B, C) un sistem liniar continuu (discret). Atunci $p \times m$ matricea rațională în nedeterminata s (nedeterminata z)

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B \tag{1.18}$$

$$(T(z) = C(zI - A)^{-1}B) \tag{1.19}$$

se numește matricea de transfer a sistemului continuu (discret).

Observația 1.2. Dacă $s \in \mathbb{C}$ $(z \in \mathbb{C})$ atunci

$$\mathscr{L}\Phi(t) = (sI - A)^{-1} \triangleq \Phi(s) \tag{1.20}$$

$$(\mathscr{Z}\Phi(k) = z(zI - A)^{-1} \triangleq \Phi(z)) \tag{1.21}$$

cu $\Phi(t)$ definită prin (1.6) ($\Phi(k)$ definită prin (1.8)) $\mathscr{L}$ fiind transformata Laplace ($\mathscr{Z}$ fiind transformata z). Atunci, dacă $u(.)$ este o funcție original, iar $x(0) = 0$, rezultă din (1.1) și (1.2), ținînd cont de (1.5),

$$y(t) = C\int_0^t \Phi(t-\tau)\, Bu(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{1.22}$$

de unde, prin aplicarea transformatei Laplace convoluției (1.22) se obține, cu (1.20),

$$y(s) = T(s)u(s) \tag{1.23}$$

unde $u(s) \triangleq \mathscr{L}u(t)$, $y(s) \triangleq \mathscr{L}\, y(t)$. În mod analog pentru sistemul discret, cu $x(0) = 0$, avem

$$y(z) = T(z)\, u(z) \tag{1.24}$$

unde $u(z) \triangleq \mathscr{Z}u(k)$, $y(z) = \mathscr{Z}y(k)$. Așadar, *matricea de transfer se asociază comportării intrare/ieșire a sistemului cu condiții inițiale nule.*

Observația 1.3. Întrucît $sI - A$ este coloană proprie (vezi definiția 14 din anexa A2) cu $\partial_{ci}\,[sI - A] = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\Phi(s)$ este strict proprie (vezi propoziția 8 din anexa A2). Analog pentru $\Phi(z)$. Așadar, $T(s)$ definită prin (1.18) ($T(z)$ definită prin (1.19)) este *strict proprie.*

DEFINIȚIA 1.3. Fie $T(s)$ ($T(z)$) o $p \times m$ matrice rațională strict proprie. Sistemul (A, B, C) pentru care este valabilă (1.18), (1.19) se numește realizare continuă (discretă) a lui $T(s)$ ($T(z)$).

TEOREMA 1.1. *Fie $T(s)$ ($T(z)$) o $p \times m$ matrice rațională strict proprie. Există atunci o realizare (A, B, C) a lui $T(s)$ ($T(z)$).*

DEFINIȚIA 1.4. Fie $T(s)$ ($T(z)$) o $p \times m$ matrice rațională strict proprie. O realizare (A, B, C), cu A $n \times n$, a lui $T(s)$ ($T(z)$) se numește minimală dacă nu există o altă realizare $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$, cu $\hat{A}$ $\hat{n} \times \hat{n}$, astfel încît $\hat{n} < n$

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 1.5. Două sisteme (A, B, C) și $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ se numesc izomorfe dacă există o matrice nesingulară T, astfel încît

$$\hat{A} = T A T^{-1} \tag{1.25}$$

$$\hat{B} = T B \tag{1.26}$$

$$\hat{C} = C T^{-1}. \tag{1.27}$$

Rezultă imediat că *două sisteme izomorfe au aceeași matrice de transfer.*

TEOREMA 1.2. *Toate realizările minimale ale unei matrici raționale strict proprii sînt izomorfe.*

DEFINIȚIA 1.6. Două sisteme care au aceeași matrice de transfer se numesc echivalente (intrare/ieșire).

Rezultă imediat că *două sisteme izomorfe sînt echivalente*, reciproca nefiind adevărată.

Se obișnuiește ca în locul tripletului (A, B, C) să se opereze cu cvadruplul (A, B, C, D) avînd semnificația

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.28}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.29}$$

în continuu, și

$$x(k+1) = A\,x(k) + Bu(k) \tag{1.30}$$

$$y(k) = C\,x(k) + Du(k) \tag{1.31}$$

în discret. În acest caz matricea de transfer devine

$$T(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \tag{1.32}$$

$$(T(z) = C(zI - A)^{-1} B + D) \tag{1.33}$$

(1.23) ((1.24)) păstrîndu-și valabilitatea.

Observația 1.4. Matricea rațională (1.32) ((1.33)) este proprie, ea reprezentîndu-se unic ca suma dintre cît și partea strict proprie,

$$T(s) = D + T_1(s) \tag{1.34}$$

unde $T_1(s)$ este strict proprie. Atunci toate realizările (A, B, C, D) ale lui $T(s)$ au același D (cîtul lui $T(s)$), (A, B, C) fiind o realizare a părții strict proprii $T_1(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. CONTROLABILITATE. OBSERVABILITATE

DEFINIȚIA 1.6. Sistemul (A, B, C) sau perechea (A, B) se numește controlabil(ă) dacă

$$\operatorname{rang} R = n \tag{1.35}$$

unde

$$R \triangleq [B\ AB \ldots A^{n-1}B] \tag{1.36}$$

se numește matrice de controlabilitate.

DEFINIȚIA 1.7. Sistemul (A, B, C) sau perechea (C, A) se numește observabil(ă) dacă

$$\operatorname{rang} Q = n \tag{1.37}$$

unde

$$Q^T \triangleq [C^T A^T C^T \ldots (A^T)^{n-1} C^T] \tag{1.38}$$

se numește matrice de observabilitate.

Rezultă imediat din (1.38) că perechea (C,A) este observabilă dacă și numai dacă, perechea (A^T, C^T) este controlabilă. De asemenea (1.35) este echivalentă cu

$$\operatorname{Im} R = \mathbb{R}^n \tag{1.39}$$

iar (1.37) cu

$$\operatorname{Ker} Q = 0. \tag{1.40}$$

Afirmația de mai sus, împreună cu (1.39) și (1.40) pun în evidență dualitatea care există între noțiunile de controlabilitate și observabilitate.

Fie (A, B) o pereche oarecare și

$$R_k \triangleq [B\ AB = \ \ldots\ A^{k-1}B]. \tag{1.41}$$

Atunci avem

TEOREMA 1.3. *Există un cel mai mic întreg μ astfel încît*

$$\operatorname{rang}\ R_{\mu+i} = \operatorname{rang}\ R_\mu, \quad i \geqslant 1 \tag{1.42}$$

μ poartă numele de indice de controlabilitate.

De observat că

$$\frac{n}{m} \leqslant \mu \leqslant q \tag{1.43}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde q este gradul polinomului minimal al matricii A (vezi anexa A3).

În mod analog, prin dualitate, se introduce și *indicele de observabilitate* ν.

TEOREMA 1.4. *Izomorfismul conservă controlabilitatea și observabilitatea, precum și indicii* μ *și* ν *de controlabilitate, respectiv observabilitate.*

TEOREMA 1.5. *Fie* $T(s)$ *strict proprie. Atunci o realizare* (A, B, C) *este minimală dacă și numai dacă este controlabilă și observabilă.*

Ținînd cont de teorema 1.2 rezultă că *toate realizările controlabile și observabile ale lui* $T(s)$ *sînt izomorfe.*

TEOREMA 1.6. (*Hautus*). *Perechea* (A, B) *este controlabilă, dacă și numai dacă*

$$\text{rang}\ [sI - A \quad B] = n \tag{1.44}$$

oricare ar fi $s \in \mathbb{C}$.

1.3. LEGE DE COMANDĂ

DEFINIȚIA 1.8. Se numește lege de comandă după stare dependența

$$u = Fx + Gv \tag{1.45}$$

unde F, G sînt $m \times n$ și $m \times q$ matrici cu $v \in \mathbb{R}^q$ noua comandă. Componenta Fx din (1.44) se numește (lege de) reacție după stare.

DEFINIȚIA 1.9. Se numește lege de comandă după ieșire dependența

$$u = Hy + Gv \tag{1.46}$$

unde H este $m \times p$. Componenta Hy din (1.45) se numește (lege de) reacție după ieșire.

Se vede că (1.45) se mai poate scrie și

$$u = HCx + Gv. \tag{1.47}$$

Fie (A, B, C) un sistem. Aplicînd (1.45) acesta devine $(A+BF, BG, C)$, iar pentru (1.46) devine $(A+BHC, BG, C)$.

Referitor la legile de comandă (1.44), (1.45) avem următoarele rezultate remarcabile :

TEOREMA 1.7. *Fie* (A, B) *o pereche controlabilă cu indicele de controlabilitate* μ. *Atunci pentru toate* $m \times n$ *matricele* F $(A+BF, B)$ *este controlabilă avînd același indice de controlabilitate* μ.

TEOREMA 1.8. *Fie* (A, B) *o pereche controlabilă. Atunci pentru aproape toate perechile* (F, g) *cu* F $m \times n$ *și* g $m \times 1$, *perechea* $(A+BF, Bg)$ *este controlabilă.*

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1.9. *Fie* (A, B, C) *un sistem controlabil şi observabil. Atunci pentru aproape toate tripletele* (h^T, H, g) *cu* h^T $1 \times p$, F $m \times p$ *şi* g $m \times 1$, *sistemul* $(h^T C, A + BHC, Bg)$ *este controlabil şi observabil.*

În mod dual se enunţă teoremele 1.6 şi 1.7 pentru o pereche (C, A) observabilă.

1.4. FORME CANONICE

Fie $\mathcal{F}$ familia perechilor (A, B) controlabile cu A $n \times n$, B $n \times m$, şi rang $B = m$ (maximal coloană), adică

$$\mathcal{F} = \{(A, B) \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m},\ \text{rang } B = m,\ (A,B) \text{ controlabilă}\} \quad (1.48)$$

Vom spune că perechile (A, B), $(\hat{A}, \hat{B}) \in \mathcal{F}$ sînt echivalente notînd $(A, B) \sim (\hat{A}, \hat{B})$ dacă există o matrice nesingulară T astfel încît să fie îndeplinite (1.25) şi (1.26). Se verifică imediat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{F}$.

DEFINIŢIA 1.10. Aplicaţia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ se numeşte canonică dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

(i) $\varphi((A, B)) \sim (A, B)$, $\forall (A, B) \in \mathcal{F}$

(*ii*) $(A, B) \sim (\hat{A}, \hat{B})$ dacă şi numai dacă $\varphi((A, B)) = \varphi((\hat{A}, \hat{B}))$.

Dacă φ este o aplicaţie canonică şi $(A, B) \in \mathcal{F}$, atunci $(\hat{A}, \hat{B}) \triangleq \varphi((A, B))$ se numeşte forma canonică a perechii (A, B).

Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$ şi clasa de echivalenţă

$$\overline{(A, B)} = \{(\hat{A}, \hat{B}) \mid (\hat{A}, \hat{B}) \sim (A, B)\}. \quad (1.49)$$

Atunci $\overline{(A, B)}$ se numeşte *orbita* perechii (A, B). Dacă φ este o aplicaţie canonică, atunci din definiţia 1.10 rezultă că *toate perechile care aparţin aceleeaşi orbite au aceeaşi formă canonică şi reciproc; dacă două perechi au aceeaşi formă canonică ele aparţin aceleeaşi orbite.*

Vom construi acum o aplicaţie pe $\mathcal{F}$. Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$ şi $B = [b_1\ b_2 \ldots b_m]$, b_i fiind coloanele lui B. Aplicăm următoarea procedură.

Pasul 1. Fie

$$R = [b_1\ b_2 \ldots b_m \mid Ab_1\ Ab_2 \ldots Ab_m \mid \ldots \mid A^{n-1}b_1\ A^{n-1}b_2 \ldots A^{n-1}b_m] \quad (1.50)$$

matricea de controlabilitate a perechii (A, B) scrisă explicit. Selectăm din R primele coloane, de la stînga la dreapta, liniar independente din R. De observat că, deoarece rang $B = m$, toate coloanele lui B vor figura în primele m coloane din cele n selectate.

Reordonăm lexicografic coloanele selectate în forma

$$L \triangleq [b_1\ Ab_1 \ldots A^{d_1-1}b_1 \mid b_2\ Ab_2 \ldots A^{d_2-1}b_2 \mid \ldots \mid b_m\ Ab_m \ldots A^{d_m-1}b_m] \quad (1.51)$$

unde L este $n \times n$ nesingulară. Întregii $d_1, d_2, \ldots d_m \geqslant 1$ se numesc *indici de controlabilitate*. De observat că

$$\mu = \max_i\ d_i \quad (1.52)$$

este indicele de controlabilitate al perechii (A, B).

Fie introduși întregii

$$\sigma_i \triangleq \sum_{k=1}^{i} d_k. \tag{1.53}$$

Pasul 2. Se calculează L^{-1} și se selectează din L^{-1} liniile cu indicii $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, notate respectiv $q_1^T, q_2^T, \ldots, q_m^T$.

Pasul 3. Se construiește matricea

$$T_c \triangleq \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_1^T A \\ \cdots\cdots \\ q_1^T A^{d_1-1} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ q_m^T \\ q_m^T A \\ \cdots\cdots \\ q_m^T A^{d_m-1} \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

care se demonstrează că este nesingulară.

Avem atunci

TEOREMA 1.10. *Aplicația* $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ *prin* $(A, B) \mapsto (T_c A T_c^{-1},\ T_c B)$ *cu* T_c *dat de (1.54), este o aplicație canonică.* Perechea $(\hat{A},\ \hat{B})$ definită prin $\hat{A} = T_c A T_c^{-1}$, $\hat{B} = T_c B$ se numește *forma canonică controlabilă* de tip companion sau *forma canonică lexicografică* a perechii (A, B) și are structura :

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:ccc}
0 & 1 & 0\ldots & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \ldots & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & \\
x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & x & x & \ldots & x \\
\hdashline
 & & & & 0 & 1 & 0\ldots & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & x & x & \ldots & x \\
\hdashline
\hdashline
 & & & & & & & & 0 & 1 & 0..0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & \ddots & 1 \\
x & x & \ldots & x & x & \ldots & x & x & x\ldots & x & x
\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \sigma_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \sigma_2 \\ \\ \\ \\ \\ \sigma_m \end{array}
\qquad
\hat{B} = \left[\begin{array}{c:c:c:c}
1 & x & & x \\
\hdashline
 & & & \\
0 & 1 & & x \\
\hdashline
\hdashline
 & & & \\
0 & 0 & & 1
\end{array}\right]\begin{array}{l} \sigma_1 \\ \\ \sigma_2 \\ \\ \\ \sigma_m \end{array} \tag{1.55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie A_m $m \times n$ matricea formată din liniile cu indicii σ_1, σ_2, ... σ_m din $\hat{A}$, iar B_m $m \times m$ matricea formată cu liniile cu aceiași indici din $\hat{B}$. Se vede imediat că B_m este nesingulară. Atunci, aplicînd perechii $(\hat{A}, \hat{B})$ legea de comandă $u = \hat{F}\hat{x} + v$, perechea nou obținută $(\hat{A}+\hat{B}\hat{F}, \hat{B})$ are aceeași structură cu (1.55), modificîndu-se numai liniile cu indicii $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ conform cu

$$A_{mF} = A_m + B_m\hat{F}. \tag{1.56}$$

Rezultă imediat de aici că, dacă se dorește o anumită matrice A_{mF}, matricea de reacție $\hat{F}$ este

$$\hat{F} = B_m^{-1}(A_{mF} - A_m) \tag{1.57}$$

Cu aceste elemente avem

TEOREMA 1.11. *Fie (A, B) o pereche controlabilă și Λ un set simetric*) de n numere complexe. Există atunci o matrice F, astfel încît* **)

$$\sigma(A + BF) = \Lambda \tag{1.58}$$

Într-adevăr, fie $(\hat{A}, \hat{B})$ forma canonică controlabilă de tip companion și $\pi(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{n-1} s^{n-1} + s^n$ polinomul care are ca rădăcini mulțimea Λ. Alegînd

$$A_{mF} = \begin{bmatrix} 0 \ldots 1 \ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots 0 \\ -\alpha_0 - \alpha_1 \ldots - \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

unde unitățile se găsesc în coloanele cu indicii $\sigma_1 + 1, \ldots, \sigma_{m-1} + 1$,

$$F = \hat{F}T_c \tag{1.60}$$

cu $\hat{F}$ dat de (1.57). Demonstrația este imediată observînd că $(\hat{A}+\hat{B}\hat{F})$ este companionul asociat lui $\pi(s)$ (vezi anexa A3).

DEFINIȚIA 1.11. O pereche (A, B) avînd proprietatea că pentru orice set simetric de n numere complexe Λ există F, astfel încît (1.58) să fie îndeplinită, se numește alocabilă.

Din teorema 1.11 se vede că o pereche (A, B) controlabilă este și alocabilă. Este adevărată și reciproca acestei afirmații.

---

*) fiecare număr complex apare împreună cu conjugatul său.
**) $\sigma(\ )$ este spectrul, adică mulțimea valorilor proprii ale unei matrice.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. STABILITATE ŞI STABILIZARE

DEFINIŢIA 1.12. Fie sistemul (A, B, C) şi $\sigma(A)$ spectrul matricii A. Sistemul se numeşte (intern) stabil dacă

a) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$,*), pentru cazul cînd (A, B, C) este continuu

b) $\sigma(A) \subset V_1(0)$**), pentru cazul cînd (A, B, C) este discret

DEFINIŢIA 1.13. Sistemul (A, B, C) se numeşte stabil intrare/ieşire dacă

a) polii matricii de transfer (vezi definiţia 19 din anexa A2) $T(s) = C(sI-A)^{-1}B$ sînt în $\mathbb{C}^-$, pentru cazul cînd (A, B, C) este continuu;

b) polii matricii de transfer $T(z) = C(zI-A)^{-1}B$ sînt în $V_1(0)$, pentru cazul cînd (A, B, C) este discret.

TEOREMA 1.12. *Fie sistemul (A, B, C) controlabil şi observabil. Atunci (A, B, C) este (intern) stabil dacă şi numai dacă este stabil intrare/ieşire.*

DEFINIŢIA 1.14. Sistemul (A, B, C) (perechea (A, B)) se numeşte stabilizabil (prin reacţie după stare) dacă există o lege de comandă $u = Fx+v$ astfel încît sistemul $(A+BF, B, C)$ să fie (intern) stabil.

Din definiţia 1.11, alegînd $\Lambda \subset \mathbb{C}^-$, se vede că *o pereche alocabilă este şi stabilizabilă*, reciproca nefiind adevărată. Cu teorema 1.11 avem *că o pereche (A, B) controlabilă este stabilizabilă.*

1.6. ESTIMATORI

Fie (A, B, C) un sistem şi x starea acestuia. Fie F o $q \times n$ matrice. Introducem

DEFINIŢIA 1.15. Sistemul

$$\dot{z} = Jz + Ky + Lu \tag{1.61}$$

$$w = Mz \tag{1.62}$$

şi respectiv sistemul

$$\dot{z} = Jz + Ky + Lu \tag{1.63}$$

$$w = Mz + Ny \tag{1.64}$$

se numeşte F-estimator (stabil asimptotic) sau strict propriu, respectiv propriu, dacă

$$\lim_{t\to\infty} (w(t) - Fx(t)) = 0 \tag{1.65}$$

cu w furnizat de (1.62) respectiv (1.64). Dacă J este $l \times l$ ($z \in \mathbb{R}^l$), l se numeşte ordinul estimatorului.

---

*) Semiplanul sting complex fără axa imaginară, $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^+ = \mathbb{C}$.

**) Interiorul cercului de rază unitate cu centrul în origine.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

TEOREMA 1.13. *Dacă există matricile* J, K, L, M, N, T *cu* J *stabilă (alocabilă) astfel încît*

$$JT - TA + KC = 0 \tag{1.66}$$

$$MT + NC - F = 0 \tag{1.67}$$

$$(MT - F = 0) \tag{1.68}$$

atunci se poate construi un F*-estimator propriu (strict propriu).* Se obișnuiește următoarea terminologie:

— dacă $F = I_n$, F-estimatorul se numește *estimator de stare*;

— dacă F este $m \times n$, F-estimatorul se numește *estimator de lege de reacție*;

— dacă F este $1 \times n$ (adică $F = f^T$), F-estimatorul se numește *estimator de funcțională.*

Se impun următoarele observații:

Observația 1.5. Ecuațiile (1.66) și (1.67) ((1.68)) au totdeauna o soluție (J, K, L, M, N) $((J, K, L, M))$. Scriind estimatorul (1.63), (1.64) ((1.61), (1.62)) pentru această soluție, se constată că dacă $z(0) - T x(0) = 0$, atunci

$$w(t) - F x(t) = 0 \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{1.69}$$

Din acest motiv sistemul (J, K, L, M, N) se numește F-estimator fără a i se atribui calificativul de *asimptotic*. Singura problemă care apare în acest caz este de a construi un F-estimator de ordin minim (l = minim) care sigur există, deoarece (1.66), (1.67) au totdeauna cel puțin o soluție.

Dacă acum $z(0) - T x(0) \neq 0$, (1.69) nu va mai fi îndeplinită. Cerința care apare în acest caz este ca (1.69) să fie îndeplinită asimptotic, ceea ce revine la condiția (1.65). Pentru satisfacerea acestei condiții trebuie ca soluția (J, K, L, M, N) să aibă matricea J *stabilă* (alocabilă). F-estimatorul cu J stabilă (alocabilă) se numește *F-estimator stabil* sau *asimptotic* (alocabil) și corespunde definiției 1.15. În acest caz, problema construirii unei soluții (J, K, L, M, N) cu J stabilă (alocabilă) se complică, iar problema construirii unei soluții stabile (alocabile) de ordin minim este nerezolvată în cazul general pînă în prezent.

Față de comentariul de mai sus, se cunoaște următorul rezultat dat de

TEOREMA 1.14. *Dacă sistemul* (A, B, C) *este observabil se poate construi un* F*-estimator alocabil (deci și stabil), în particular de ordin* $l = m(\nu - 1)$ *(ν indicele de observabilitate al perechii* (C, A)*). Mai mult, se pot construi estimatorii de stare strict propriu și propriu, alocabili și de ordin minim, acesta fiind* $l = n$ *și respectiv* $l = n - p$ *(p = rang C).*

Observația 1.6. Estimatorul de stare strict propriu alocabil și de ordin minim este

$$\dot{z} = (A + HC)\, z - Hy + Bu \tag{1.70}$$

$$w = z. \tag{1.71}$$

Întrucît (C, A) este observabilă ((A^T, C^T) controlabilă), se poate alege H (vezi teorema 1.11) astfel încît spectrul lui $A+HC$ să fie apriori impus. Estimatorul (1.70), (1.71) se mai numește și estimator Kalman.

Observația 1.7. Fie perechea (C, A) cu rang $C = p$ (rang maximal linie). Fie S $n \times n$ matricea nesingulară

$$S = \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ C \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-p \\ \\ \}p \end{matrix} \tag{1.72}$$

unde E este o completare adecvată a liniilor lui C. Atunci

$$\hat{C} = C S^{-1} = [0 \quad I_p] \tag{1.73}$$

$$\hat{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_3 \\ \cdots & \cdots \\ \underbrace{\hat{A}_2}_{n-p} & \underbrace{\hat{A}_4}_{p} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-p \\ \\ \}p \end{matrix} \tag{1.74}$$

În consecință, orice pereche (C, A) cu C de rang maximal linie poate fi considerată de la început în forma (1.73), (1.74).

Avem

LEMA 1.1. (GOPINATH). Fie perechea $(\hat{C}, \hat{A})$ de tipul (1.73), (1. 74). Atunci $(\hat{C}, \hat{A})$ este observabilă dacă și numai dacă $(\hat{A}_2, \hat{A}_1)$ este observabilă.

Observația 1.7. Fie sistemul $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ observabil cu perechea $(\hat{C}, \hat{A})$ în forma (1.73), (1.74) și $\hat{x}$ starea acestuia scrisă

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \cdots \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-p \\ \\ \}p \end{matrix} \tag{1.75}$$

Atunci avem evident

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{A}_1 \hat{x}_1 + \hat{A}_3 \hat{x}_2 + \hat{B}_1 u \tag{1.76}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_2 \hat{x}_1 + A_4 \hat{x}_2 + \hat{B}_2 u \tag{1.77}$$

$$y = \hat{x}_2 \tag{1.78}$$

și unde

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \cdots \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-p \\ \\ \}p \end{matrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind (1.78) în (1.77) și (1.76) și rescriind ecuațiile, avem

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_1\hat{x}_1 + [\hat{A}_3 \vdots \hat{B}_1]\begin{bmatrix} y \\ \cdots \\ u \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

$$\dot{y} - A_4 y - B_2 u = \hat{A}_2\hat{x}_1 \tag{1.80}$$

rezultînd sistemul $(\hat{A}_1, [\hat{A}_3, \hat{B}_1], \hat{A}_2)$, care, conform lemei 1, este observabil avînd intrarea $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ și ieșirea $\dot{y} - A_4 y - B_2 u$. Estimatorul de stare strict propriu alocabil și de ordin minim, adică estimatorul Kalman, pentru sistemul (1.79), (1.80) este estimatorul de stare propriu, alocabil și de ordin minim pentru sistemul $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$. Acest estimator se numește și estimator Luenberger.

Bibliografie

1.1. C. Penescu, *Sisteme, concepte, caracterizări. Sisteme liniare*. Ed. Tehnică, 1975.
1.2. W. M. Wonham, *Linear multivariable control*. Springer Verlag, New York, 1974.
1.3. V. Ionescu, *Introducere în teoria structurală a sistemelor liniare*, Ed. Academiei R. S. R., 1975.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

Reprezentarea polinomială a sistemelor

În acest capitol se introduc elementele definitorii și se prezintă rezultatele de bază ale așa-numitei *teorii polinomiale* a sistemelor liniare. Construcția formală a acestei teorii este în fond o algebrizare, într-un anumit sens, complementară, schemei de algebrizare folosite în teoria construită pe conceptul de stare. Dacă în abordarea prin reprezentările de stare suportul algebric îl constituie algebra liniară, cu precădere teoria subspațiilor invariante (vezi anexa A3), în dezvoltările din această lucrare, care încep cu prezentul capitol, instrumentul algebric central îl constituie *teoria matricilor polinomiale și a celor raționale* (în nedeterminata s, vezi anexa A2). Aparent cititorul va reîntîlni reprezentările operaționale tradiționale dar, nu în accepțiunea comportării în frecvență, ci în maniera facilităților oferite de teoria morfismelor dintre spațiile liniare peste corpul $\mathbb{R}(s)$ al fracțiilor raționale (vezi anexa A1).

Rezultatele din acest capitol se grupează în jurul noțiunii de *echivalent de stare* (al unei reprezentări polinomiale de stare parțială), noțiune care permite transpunerea corectă în limbaj polinomial a rezultatelor fundamentale exprimate în limbajul de stare și cu care cititorul este deja familiarizat, prin reamintirea acestora în primul capitol al cărții.

2.1. REPREZENTĂRI POLINOMIALE DE STARE

DEFINIȚIA 2.1. Fie sistemul (A, B, C, D), unde A, B, C și D sînt $n \times n$, $m \times n$, $p \times n$ și $p \times m$ matrici constante, respectiv. Se numește sistem în reprezentare polinomială de stare cvadruplul $(sI-A, B, C, D)$ avînd semnificația sistemului de ecuații

$$(sI-A)\, x(s) = Bu(s) \tag{2.1}$$

$$y(s) = C\, x(s) + Du(s) \tag{2.2}$$

unde $u(s) \in \mathbb{R}^m(s)$, $x(s) \in \mathbb{R}^n(s)$, $y(s) \in \mathbb{R}^p(s)$ sînt intrarea, starea și respectiv ieșirea sistemului, n este ordinul sistemului, iar $\mathbb{R}(s)$ este corpul fracțiilor raționale (în nedeterminata s) cu coeficienți reali (vezi anexa A1).

Ecuațiile (2.1) și (2.2) conduc la reprezentarea din figura 2.1.

Se constată imediat că ecuațiile (2.1), (2.2) definesc unic o aplicație $u(s) \mapsto y(s)$, $y(s) = T(s)\, u(s)$, unde :

$$T(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \tag{2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

este o $p \times m$ matrice rațională proprie, purtînd numele de *matrice de transfer* asociată reprezentării (2.1), (2.2) sau sistemului (A, B, C, D).

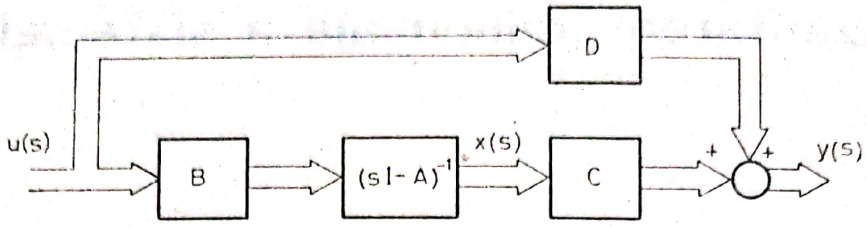


Fig. 2.1

În general, în dezvoltările din această lucrare *vom înțelege prin matrice de transfer, orice matrice rațională proprie.*

Observația 2.1. Se vede imediat că ecuațiile (2.1) și (2.2) rezultă din aplicarea formală a transformatei Laplace ecuațiilor de stare asociate cvadruplului (A, B, C, D)

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.4}$$

$$y = Cx + Du \tag{2.5}$$

pentru $x(0) = 0$.

Observația 2.2. Dacă $T(s)$ este o $p \times m$ matrice de transfer, atunci ea se scrie unic sub forma :

$$T(s) = T_1(s) + D \tag{2.6}$$

unde D este cîtul iar $T_1(s)$ partea strict proprie a lui $T(s)$, (vezi teorema 11 din anexa A2). Rezultă atunci că $T(s)$ este matricea de transfer asociată oricărei reprezentări polinomiale de stare în care D este cîtul lui $T(s)$, unic definit, iar (A, B, C) este orice realizare a părții strict proprii $T_1(s)$.

Ecuațiile (2.1) și (2.2) se scriu compact

$$\begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Matricea polinomială

$$\Pi(s) \triangleq \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

se numește *matricea polinomială asociată sistemului* (A, B, C, D) *sau reprezentării* (2.1), (2.2).

Definiția 2.2. Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare $(sI-A, B, C, D)$ și $(sI-\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ se numesc algebric echivalente dacă există o matrice nesingulară T, astfel încît

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

matricile polinomiale asociate numindu-se, de asemenea, algebric echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

Din (2.9) rezultă imediat că $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, $\bar{C} = CT^{-1}$ și $\bar{D} = D$. Cu alte cuvinte, *echivalența algebrică este identică ca noțiune cu izomorfismul sistemelor* (A, B, C, D) *și* $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$.

DEFINIȚIA 2.3. Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare $(sI-A, B, C, D)$ și $(sI-\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ se numesc strict echivalente dacă există $n \times n$ matricile unimodulare $M(s)$ și $N(s)$ și matricele polinomiale $X(s)$, $Y(s)$ $p \times n$ și respectiv $n \times m$, astfel încît

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

matricile polinomiale asociate numindu-se, de asemenea, strict echivalente.

Din (2.10) avem egalitățile

$$sI-\bar{A} = M(s)\,(sI-A)\,N(s) \tag{2.11}$$

$$\bar{B} = M(s)\,(B-(sI-A)Y(s)) \tag{2.12}$$

$$\bar{C} = (X(s)\,(sI-A) + C)N(s) \tag{2.13}$$

$$\bar{D} = X(s)\,((sI-A)\,Y(s)-B) + CY(s)+D \tag{2.14}$$

Notînd cu $T(s)$ și $\bar{T}(s)$ matricele de transfer ale celor două sisteme, respectiv, și ținînd cont de (2.11), (2.12), (2.13) și (2.14) rezultă

$$\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = C(sI-A)^{-1}B+D \tag{2.15}$$

adică

$$T(s) = \bar{T}(s). \tag{2.16}$$

Avem deci :

PROPOZIȚIA 2.1. Două sisteme cu matricile polinomiale asociate strict echivalente au aceeași matrice de transfer.

Ținînd cont de observația 2.2 și de (2.16) rezultă că

$$\bar{D} = D \tag{2.17}$$

și deci între $X(s)$ și $Y(s)$ există conexiunea

$$X(s)\,((sI-A)\,Y(s)-B) + C\,Y(s) = 0. \tag{2.18}$$

Conexiunea dintre echivalența algebrică și cea strictă este dată de :

TEOREMA 2.1. *Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare sînt algebric echivalente dacă și numai dacă sînt strict echivalente.*

Demonstrație. Necesitatea este evidentă. Pentru suficiență, să considerăm (2.10) adevărată și să presupunem, conform condiției de necesitate, că cele două sisteme au fost transformate prin izomorfism, astfel încît A și $\bar{A}$ sînt în prima formă canonică Jordan (vezi Anexa A3). Atunci, din (2.11) rezultă că $(sI-A)$ și $(sI-\bar{A})$ sînt unimodular echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință (vezi observația 3, pct. 5 din Anexa A2), A și $\bar{A}$ au aceiași factori invarianți. Cum A și $\bar{A}$ sînt în prima formă canonică Jordan avem :

$$\bar{A} = A \tag{2.19}$$

Pe de altă parte, (vezi teorema 6 din Anexa A3), din (2.11) rezultă că $M(s)$ și $N(s)$ sînt, ținînd cont de (2.19), de forma

$$M(s) = (sI-A)M_1(s) + M_0 \tag{2.20}$$

$$N(s) = N_1(s)\,(sI-A) + N_0 \tag{2.21}$$

unde

$$M_0N_0 = I \tag{2.22}$$

iar

$$sI-A = M_0(sI-A)M_0^{-1}. \tag{2.23}$$

Evaluăm acum

$$\begin{bmatrix} W_{11}(s) & -W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ X_a(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0^{-1} & Y_a(s) \\ O & I_m \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

unde $X_a(s)$ și $Y_a(s)$ sînt matrici polinomiale necunoscute.

Utilizînd forma expresiilor (2.12), (2.13) și (2.14), avem

$$W_{11}(s) = M_0(sI-A)^{-1}M_0^{-1} \tag{2.25}$$

$$W_{12}(s) = M_0(B-(sI-A)\,Y_a(s)) \tag{2.26}$$

$$W_{21}(s) = (X_a(s)\,(sI-A) + C)M_0^{-1} \tag{2.27}$$

$$W_{22}(s) = X_a(s)\,((sI-A)\,Y_a(s)-B) + CY_a(s) + D. \tag{2.28}$$

Determinăm $Y_a(s)$ astfel încît $W_{12}(s) = \bar{B}$. Utilizînd (2.12) rezultă ecuația

$$M_0(B-(sI-A)\,Y_a(s)) = M(s)\,(B-(sI-A)\,Y(s)). \tag{2.29}$$

Avem atunci

$$(M_0-M(s))\,B + M(s)\,(sI-A)\,Y(s) = M_0(sI-A)\,Y_a(s). \tag{2.30}$$

Ținînd cont de (2.20), (2.11), (2.19) și (2.23), (2.30) devine

$$-(sI-A)\,M_1(s)B+(sI-A)\,N^{-1}(s)\;Y(s) = (sI-A)\,M_0Y_a(s) \tag{2.31}$$

de unde, după simplificarea lui $(sI-A)$ rezultă

$$Y_a(s) = M_0^{-1}(N^{-1}(s)\;Y(s) - M_1(s)B). \tag{2.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, din ecuaţia $W_{21}(s) = \bar{C}$, rezultă

$$X_a(s) = (X(s)\, M^{-1}(s) + C\, N_1(s))M_0. \tag{2.32'}$$

În consecinţă, există $X_a(s)$ şi $Y_a(s)$, matrici polinomiale, astfel încît, din (2.26) şi (2.27) să avem

$$\bar{B} = M_0(B-(sI-A)\, Y_a(s)) \tag{2.33}$$

şi

$$\bar{C} = (X_a(s)\, (sI-A) + C)M_0^{-1} \tag{2.34}$$

Rezultă atunci din (2.33) că

$$Y_a(s) = -(sI-A)^{-1}\, (M_0^{-1}\, \bar{B}-B) \tag{2.35}$$

şi cum membrul drept este evident o matrice strict proprie ($(sI-A)$ linie proprie cu $\partial_r[sI-A] = 1$) se obţine în definitiv

$$Y_a(s) = 0. \tag{2.36}$$

Analog avem din (2.34)

$$X_a(s) = 0. \tag{2.37}$$

Cu (2.36) şi (2.37), (2.28) devine

$$W_{22}(s) = D. \tag{2.38}$$

În consecinţă, ţinînd cont de (2.23), (2.19), (2.36), (2.37) şi (2.38) în (2.25), (2.26), (2.27) şi (2.28), precum şi de (2.17), (2.24) devine :

$$\begin{bmatrix} sI-\bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

ceea ce demonstrează complet teorema.

2.2. REPREZENTĂRI POLINOMIALE DE STARE PARŢIALĂ

O generalizare naturală a ecuaţiilor (2.1), (2.2) conduce la o reprezentare de tipul

$$P(s)\, z(s) = Q(s)\, u(s) \tag{2.40}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) + W(s)\, u(s) \tag{2.41}$$

unde $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$ şi $W(s)$ sînt $q \times q$, $q \times m$, $p \times q$ şi $p \times m$ matrici polinomiale, respectiv, cu $P(s)$ *totdeauna nesingulară*, iar $u(s) \in \mathbb{R}^m(s)$, $z(s) \in \mathbb{R}^q(s)$, $y(s) \in \mathbb{R}^p(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

introducem,

DEFINIȚIA 2.4. Se numește sistem în reprezentare polinomială de stare parțială, cvadruplul $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ avînd semnificația ecuațiilor (2.40), (2.41) unde $z(s)$ poartă numele de stare parțială, $u(s)$ și $y(s)$ sînt intrarea și respectiv ieșirea sistemului iar $n \stackrel{\Delta}{=} \partial[|P(s)|]$ este ordinul sistemului.

Rezultă imediat reprezentarea din figura 2.2.

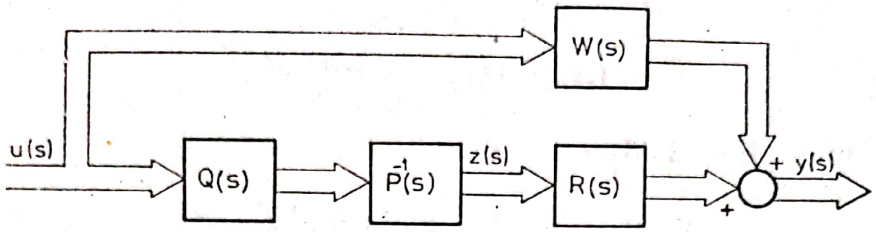


Fig. 2.2.

Se constată că, dacă în particular $P(s) = sI - A$, $Q(s) = B$, $R(s) = C$, $W(s) = D$ se obține o reprezentare polinomială de stare, adică *un sistem în reprezentarea polinomială de stare este simultan și în reprezentarea polinomială de stare parțială.*

Ecuațiile (2.40), (2.41) definesc o aplicație $u(s) \mapsto y(s)$ $y(s) = T(s)$, $u(s)$, unde

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s)\,Q(s) + W(s) \tag{2.42}$$

este o $p \times m$ matrice rațională proprie, care poartă numele de *matrice de transfer* asociată sistemului $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$.

Ecuațiile (2.40), (2.41) se scriu compact.

$$\begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y(s) \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

Matricea polinomială

$$\Pi(s) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

se numește *matrice polinomială asociată sistemului* $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$.

Observația 2.3. Din (2.42) rezultă imediat o regulă elementară de citire a matricii de transfer direct din matricea polinomială asociată (2.44) și anume: $(2,1) \times (1,1)^{-1} \times [-(1,2)] + (2,2)$, (i,j) $i,j = 1,2$ fiind pozițiile matricelor care compun $\Pi(s)$.

DEFINIȚIA 2.5. Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare parțială $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ și $(\bar{P}(s), \bar{Q}(s), \bar{R}(s), \bar{W}(s))$ se numesc strict echivalente dacă există matricile unimodulare $M(s)$, $N(s)$ și matricile polinomiale $X(s)$, $Y(s)$, astfel încît

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(s) & -\bar{Q}(s) \\ \bar{R}(s) & \bar{W}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

matricile polinomiale asociate numindu-se, de asemenea, strict echivalente.

Avem imediat :

PROPOZIȚIA 2.2. Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare parțială strict echivalente au același ordin și aceeași matrice de transfer.

Demonstrație. Din efectuarea membrului drept al lui (2.45) rezultă

$$\bar{P}(s) = M(s)\, P(s)\, N(s) \tag{2.46}$$

adică $\bar{P}(s)$ și $P(s)$ sînt unimodular echivalente și deci $\partial\,[|\bar{P}(s)|] = \partial[|P(s)|]$ și totodată, din același calcul, avem și egalitatea

$$\bar{R}(s)\,\bar{P}^{-1}(s)\,\bar{Q}(s) + \bar{W}(s) = R(s)P^{-1}(s)\,Q(s) + W(s) \tag{2.47}$$

propoziția fiind demonstrată.

Observația 2.4. Fie $\Pi(s)$ și $\bar{\Pi}(s)$ matricile polinomiale asociate care intervin în (2.45). Din inspectarea structurii matricilor care flanchează $\Pi(s)$, rezultă că $\bar{\Pi}(s)$ se obține din $\Pi(s)$ prin următoarele operații :

1. operații unimodulare asupra primelor q linii, (q coloane) ;

2. substracții ale primelor q linii (q coloane), polinomial multiplicate, din ultimele p linii (q coloane).

Tipurile de operații 1 și 2 poartă numele de *operații de strictă echivalență*. Așadar, *două matrici polinomiale asociate la două sisteme, în reprezentarea polinomială de stare parțială, sînt strict echivalente, dacă și numai dacă, una se obține din cealaltă prin operații de strictă echivalență.*

Fie acum sistemul $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ avînd ordinul $n\,(= \partial|[P(s)|])$. Fie $d_i,\ i = 1,\ldots, q$ și $\tilde{d}_i,\ i = 1,\ldots, q$ indicii Kronecker coloană și respectiv linie ai lui $P(s)$ (vezi definiția 15 din anexa A2). În toate dezvoltările care urmează vom face ipoteza

$$(I)\quad d_i \geqslant 1,\ \tilde{d}_i \geqslant 1,\ i = 1,\ldots, q$$

adică $n \geqslant q$. Cu această precizare introducem :

DEFINIȚIA 2.6. Fie sistemul în reprezentarea polinomială de stare parțială $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ avînd ordinul n. Sistemul $(A, B, \ , D)$ se numește echivalent de stare (al reprezentării inițiale) dacă sistemele în reprezentarea polinomială de stare parțială : $(sI - A,\ B,\ C,\ D)$ și

$$\left(\begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & P(s) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ Q(s) \end{bmatrix}\Big\}n-q,\ [\underbrace{0}_{n-q}\ R(s)],\quad W(s)\right)$$

sînt strict echivalente, adică dacă

$$\Pi_E(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Scanned with OKEN Scanner

este strict echivalentă cu

$$\Pi_e(s) = \left[\begin{array}{cc:c} I_{n-q} & 0 & 0 \\ 0 & P(s) & -Q(s) \\ \hdashline 0 & R(s) & W(s) \end{array}\right] \tag{2.49}$$

Rezultă imediat că doi echivalenți de stare au matricile polinomiale asociate strict echivalente. În consecință, conform teoremei 2.1, aceste matrici sînt algebric echivalente și deci cei doi echivalenți de stare sînt izomorfi. De asemenea, orice sistem izomorf cu un echivalent de stare este un echivalent de stare. În consecință, odată un echivalent de stare construit, orbita acestuia caracterizează toți echivalenții de stare ai unui sistem în reprezentarea polinomială de stare parțială.

Înainte de a aborda aspectele procedurale ale construcției echivalenților de stare, se impune, ca o consecință naturală a izomorfismului acestora.

DEFINIȚIA 2.7. Un sistem în reprezentarea polinomială de stare parțială se numește controlabil (observabil) dacă un echivalent de stare al său este controlabil (observabil).

Avem imediat

TEOREMA 2.2. *Sistemul* $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ *este controlabil (observabil) dacă și numai dacă* $P(s)$ *și* $Q(s)$ $(P(s)$ *și* $R(s))$ *sînt coprime la stînga (dreapta).*

Demonstrație. Fie (A, B, C, D) un echivalent de stare. Atunci ținînd cont de echivalența strictă a matricilor $\Pi_E(s)$ și $\Pi_e(s)$ definite prin (2.48) și respectiv (2.49) (vezi și (2.45)), rezultă imediat că

$$\text{rang } [sI-A \quad -B] = n-q + \text{rang}[P(s) \quad -Q(s)] \quad \forall\, s \in \mathbb{C} \tag{2.50}$$

adică rang $[sI-A \quad -B] = n, \forall\, s \in \mathbb{C}$ dacă și numai dacă rang $[P(s) \quad -Q(s)] = q, \forall\, s \in \mathbb{C}$. Atunci din corolarul 7 din anexa A2 rezultă echivalența dintre controlabilitatea perechii (A, B) și coprimitatea la stînga a matricilor $P(s)$ și $Q(s)$. În mod analog se demonstrează textul din paranteză al teoremei.

COROLARUL 2.1. Sistemul în reprezentarea polinomială de stare parțială $(P(s), I_m, R(s), 0)$ cu $P(s)$ și $R(s)$ $m \times m$ și respectiv $p \times m$ este *controlabil*. Dacă $P(s)$, și $R(s)$ sînt coprime la dreapta sistemul este *observabil*. Matricea de transfer asociată fiind

$$T(s) = R(s)\, P^{-1}(s), \tag{2.51}$$

rezultă că sistemul de mai sus corespunde unei *factorizări la dreapta a lui* $T(s)$. Dacă sistemul este și observabil atunci el corespunde unei *factorizări prime la dreapta a lui* $T(s)$. În acest ultim caz, $R(s)$ și $P(s)$ *sînt unice* (pentru un $T(s)$ dat) *pînă la o echivalență unimodulară la dreapta* (vezi teorema 10, pct. 1, din anexa A2). În mod analog, pentru sistemul $(P(s), Q(s), I_p, 0)$, cu $P(s)$ și $Q(s)$ $p \times p$ și respectiv $p \times m$, proprietățile acestuia rezultă direct prin dualizarea proprietăților enunțate mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate introduce acum

DEFINIȚIA 2.8. Reprezentarea $(P_c(s),\ I_m,\ R(s),\ 0)$ $((P_o(s),\ Q(s),\ I_p,\ 0))$ cu $P_c(s)$ coloană proprie ($P_o(s)$ linie proprie) se numește reprezentare standard controlabilă (observabilă).

Vom începe cu studiul reprezentărilor standard.

Fie reprezentarea standard controlabilă $(P_c(s),\ I_m,\ R(s),\ 0)$ și fie

$$d_i \triangleq \hat{c}_{ci}[P_c(s)] \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, m \tag{2.52}$$

și

$$n \triangleq \sum_{i=1}^{m} d_i = \partial\ [|P_c(s)|] \tag{2.53}$$

ordinul sistemului. Fie, de asemenea, matricea

$$\Gamma_c \triangleq \Gamma_c[P_c(s)] \tag{2.54}$$

evident, nesingulară, cu ajutorul căreia definim

$$P_{cm}(s) = \Gamma_c^{-1} P_c(s) \tag{2.55}$$

Atunci $P_{cm}(s)$ rezultă, de asemenea, coloană proprie cu

$$\Gamma_c[P_{cm}(s)] = I_m. \tag{2.56}$$

În consecință, din (2.56) rezultă reprezentarea unică a lui $P_{cm}(s)$ în forma

$$P_{cm}(s) = \text{diag}\ (s^{d_i}) - A_{cm}(s) \tag{2.57}$$

unde $A_{cm}(s)$ este $m \times m$ polinomială cu

$$\partial_{ci}[A_{cm}(s)] < d_i,\quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.58}$$

Introducem $n \times m$ matricea polinomială

$$S_c(s) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{d_1-1} & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & s & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & s^{d_1-1} \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & s^{d_m-1} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd cont de (2.58), rezultă că există o $m \times n$ matrice constantă unică A_{cm} astfel încît

$$A_{cm}(s) = A_{cm} S_c(s). \tag{2.59'}$$

Cu (2.59'), (2.57) devine

$$P_{cm}(s) = \operatorname{diag}(s^{d_i}) - A_{cm} S_c(s) \tag{2.60}$$

Introducem acum perechea (A_c, B_{c0}) cu A_c $n \times n$ și B_{c0} $n \times m$, prin

(2.61)

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ x & x & \dots & x & x & x & \dots & x & x & x & \dots & x \\ & & & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & \\ x & x & \dots & x & x & x & \dots & x & x & x & \dots & x \\ & & & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ x & x & \dots & x & x & x & \dots & x & x & x & \dots & x \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} d_1 \\ \\ \\ \\ \} d_2 \\ \\ \\ \\ \} d_m \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} d_1 & d_2 & d_m \end{matrix}$$

$$B_{c0} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ & 0 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \} d_1 \\ \\ \\ \\ \} d_2 \\ \\ \\ \\ \} d_m \end{matrix}$$

care este reprezentată în forma canonică controlabilă, liniile notate cu x fiind, în aceeaşi succesiune, liniile lui A_{cm}, iar $d_1, d_2, \dots, d_m$ fiind indicii de controlabilitate ai perechii (A, B), cu $\mu \overset{\Delta}{=} \max_i d_i$ indicele de controlabilitate.

Fie D cîtul matricii de transfer asociate. Atunci se poate scrie unic (vezi teorema 11 din anexa A2).

$$T(s) = R(s)\, P_c^{-1}(s) = D + R_c(s)\, P_c^{-1}(s) \tag{2.62}$$

cu

$$\partial_c[R_c(s)] < \partial_c[P_c(s)]. \tag{2.63}$$

Din (2.63), rezultă că există unic o $p \times n$ matrice C, astfel încît

$$R_c(s) = C_c S_c(s). \tag{2.64}$$

Introducem, în fine, şi

$$B_c \overset{\Delta}{=} B_{c0} \Gamma_c^{-1}. \tag{2.65}$$

Avem atunci :

TEOREMA 2.2. *Sistemul* (A_c, B_c, C_c, D) *cu* A_c, B_c, C_c, D *introduse respectiv prin* (2.61), (2.65), (2.64) *și* (2.62) *este un echivalent de stare al reprezentării* $(P_c(s), I_m, R(s), 0)$.

Demonstrație. Fie

$$\Pi_E(s) = \begin{bmatrix} sI - A_c & -B_c \\ C_c & D \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

cu A_c, B_c, C_c, D precizate în enunț. Introducem $n \times n$ matricea

$$S_E(s) \triangleq \begin{bmatrix} S_{d_1}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & S_{d_m}(s) \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

unde

$$S_{d_i}(s) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{d_i-1} & s^{d_i-2} & 1 \end{bmatrix}, \; i = 1, \ldots, m \tag{2.68}$$

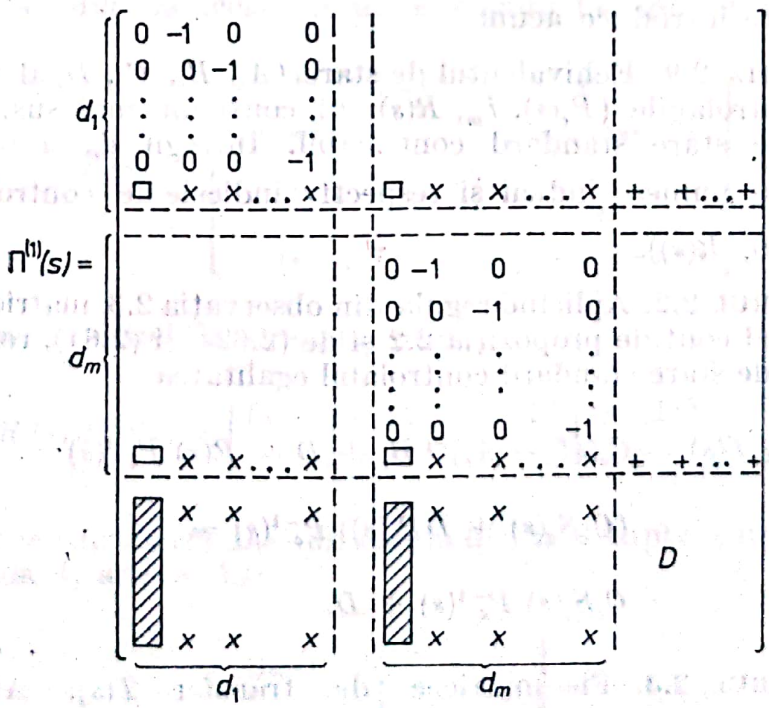
și fie $(n+m) \times (n+m)$ matricea unimodulară

$$U(s) \triangleq \begin{bmatrix} S_E(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Atunci fie

$$\Pi^{(1)}(s) = \Pi_E(s)\, U(s) \tag{2.70}$$

care, ținînd cont de structura lui $U(s)$, reprezintă efectuarea unor operații de strictă echivalență. Observînd că $n \times m$ matricea polinomială obținută din $S_E(s)$ prin reținerea coloanelor cu indicii d_1, $d_1 + d_2$, $\ldots$, $d_1 + \ldots + d_m$ este $S_c(s)$, rezultă, ținînd cont de structura matricilor A_c, B_c și de (2.60) și (2.64), că $\Pi^{(1)}(s)$ este de forma :



(2.71)

unde matricea obținută prin compactizarea elementelor notate cu □ este $P_{cm}(s)$, matricea obținută din coloanele haşurate este $C_cS_c(s)$, iar matricea formată din liniile notate + este $-\Gamma_c^{-1}$.

Efectuînd acum substracții cu ajutorul liniilor care conțin numai -1, acestea găsindu-se în primele n linii, deci efectuînd operații de strictă echivalență, toate elementele x se fac nule, elementele □ și liniile notate + rămînînd nealterate. Atunci prin permutări efectuate asupra primelor n linii și n coloane și schimbarea semnului liniilor care conțin -1 se obține matricea strict echivalentă

$$\Pi^{(2)}(s) = \left[\begin{array}{cc:c} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_{cm}(s) & -\Gamma_c^{-1} \\ \hdashline 0 & C_cS_c(s) & D \end{array}\right]. \tag{2.72}$$

Înmulțind la stînga bloc linia care conține $P_{cm}(s)$ cu Γ_c rezultă, ținînd cont de (2.55),

$$\Pi^{(3)}(s) = \left[\begin{array}{cc:c} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_c(s) & -I_m \\ \hdashline 0 & C_cS_c(s) & D \end{array}\right]. \tag{2.73}$$

În fine, adunînd la ultima bloc linie, bloc linia care conține $P_c(s)$ înmulțită la stînga cu D, rezultă din (2.62) și (2.64),

$$\Pi_e(s) = \left[\begin{array}{cc:c} I_{n-m} & 0 & 0 \\ 0 & P_c(s) & -I_m \\ \hdashline 0 & R(s) & 0 \end{array}\right] \tag{2.74}$$

rezultînd, în definitiv că, matricile (2.66) și (2.74) sînt strict echivalente, ceea ce demonstrează teorema.

Se poate introduce acum

DEFINIȚIA 2.9. Echivalentul de stare (A_c, B_c, C_c, D) al reprezentării standard controlabile $(P_c(s), I_m, R(s), 0)$, construit mai sus, se numește echivalent de stare standard controlabil. Întregii d_i, $i = 1, \ldots, m$ și $\mu \overset{\Delta}{=} \max_i d_i$ se numesc indicii și respectiv indicele de controlabilitate al perechii $(P_c(s), R(s))$.

COROLARUL 2.2. Aplicînd regula din observația 2.3. matricilor (2.66) și (2.74) și ținînd cont de propoziția 2.2 și de (2.62) și (2.64), rezultă pentru echivalentul de stare standard controlabil egalitatea

$$\begin{aligned} T(s) &= C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D = R(s)\,P_c^{-1}(s) = \\ &= (C_cS_c(s) + DP_c(s))\,P_c^{-1}(s) = \\ &= C_cS_c(s)\,P_c^{-1}(s) + D. \end{aligned} \tag{2.75}$$

COROLARUL 2.3. Fie matricea de transfer $T(s)$. Atunci, dacă

1° Se exprimă unic pe $T(s)$ prin suma dintre cît și partea întreagă

$$T(s) = D + T_1(s)$$

2° Se factorizează $T_1(s)$ în

$$T_1(s) = R_c(s)\, P_c^{-1}(s)$$

cu $P_c(s)$ coloană proprie.

3° Se calculează Γ_c, $P_{cm}(s)$, A_{cm} și C_c din (2.54), (2.55), (2.60) și (2.64) și se determină A_c și B_c prin (2.61) și (2.65) respectiv, se obține, conform cu corolarul 2.2, o realizare (A_c, B_c, C_c, D) controlabilă a lui $T(s)$. Dacă $R_c(s)$, $P_c(s)$ sînt coprime la dreapta realizarea este și observabilă.

Exemplul 2.1. Fie

$$T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+3}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-1}{(s+3)^3} & \dfrac{2s^2+7s+4}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

și se cere o realizare controlabilă și observabilă a lui $T(s)$.

1° Se calculează

$$T(s) = T_1(s) + D = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-1}{(s+1)^3} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2°.1. Se aduce la același numitor comun fiecare coloană a lui $T_1(s)$

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)(s+2)}{(s+1)^3} & \dfrac{s+1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-1}{(s+1)^3} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

factorizîndu-se vizibil la dreapta prin

$$T_1(s) = R_1(s)\, P_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & s+1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)^3 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}^{-1}$$

2°. 2. Se calculează $D(s)$ un c.m.m.d.c. la dreapta a lui $R_1(s)$ și $P_1(s)$ (vezi teorema 4, anexa A2),

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și se elimină

$$R_2(s) = R_1(s)D^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & -(s+1) \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2(s) = P_1(s)D^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^3 & -(s+1)^2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

2°. 3. Prin operații elementare asupra coloanelor lui $\begin{bmatrix} P_2(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$ se face $P_2(s)$ coloană proprie

$$\left[\begin{array}{c} P_2(s) \\ \hdashline R_2(s) \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c} P_c(s) \\ \hdashline R_c(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -(s+1)^2 \\ (s+1)(s+2) & s+2 \\ \hdashline s+1 & -(s+1) \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

(s-a substras din coloana 1-a coloana 2-a înmulțită cu $s+1$).

3°.

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{cm}(s) = \Gamma_c^{-1} P_c(s) = \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+2 \\ 0 & s^2+2s+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(s^{d_i}) - A_{cm} S_c(s) \quad i=1,2$$

$$R_c(s) = C_c S_c(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Rezultă atunci realizarea completă

$$A_c = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & & \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ \hdashline & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right], \quad B_c = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} & 0 \\ & 1 \\ \hdashline 0 & \\ -1 & \end{array}\right]$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Corolarul 2.4. Fie $F_c(s)$ o $m \times m$ matrice polinomială arbitrară cu

$$\partial_c[F_c(s)] < \partial_c[P_c(s)]. \tag{2.76}$$

Evident, din (2.76) rezultă

$$\Gamma_c[P_c(s) - F_c(s)] = \Gamma_c[P_c(s)] \tag{2.77}$$

adică $P_c(s) - F_c(s)$ este nesingulară, împreună cu existența unică a unei $m \times n$ matrici constante F_c astfel încît

$$F_c(s) = F_c S_c(s). \tag{2.78}$$

Fie (A_c, B_c, C_c, D) echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării polinomiale de stare parțială standard controlabile $(P_c(s), I_m, R(s), 0)$. Din (2.77) rezultă că $(P_c(s) - F_c(s), I_m, R(s), 0)$ este, de asemenea, o reprezentare standard controlabilă. Atunci $(A_c + B_c, F_c, B_c, C_c, D)$ este echivalentul de stare standard controlabil al acestei ultime reprezentări, cu F_c definit prin (2.78). Într-adevăr, din (2.55), (2.60) și (2.78) avem

$$P_{cm}(s) - \Gamma_c^{-1} F_c(s) = \operatorname{diag}(s^{d_i}) - (A_{cm} + \Gamma_c^{-1} F_c) S_c(s) \tag{2.79}$$

rezultînd că A_{cm} se modifică în

$$A_{cmF} = A_{cm} + \Gamma_c^{-1} F_c. \tag{2.80}$$

Fie A_{cF} matricea avînd structura (2.61) unde liniile notate cu x sînt liniile lui A_{cmF}, în aceeași succesiune. Ținînd cont de structura lui B_{c0}, rezultă din (2.80) că

$$A_{cF} = A_c + B_{c0} \Gamma_c^{-1} F_c \tag{2.81}$$

sau ținînd cont și de (2.65), (2.81) devine

$$A_{cF} = A_c + B_c F_c \tag{2.82}$$

corolarul fiind complet demonstrat.

Corolarul 2.5. Există $F_c(s)$ satisfăcînd (2.76) astfel încît rădăcinile polinomului $|P_c(s) - F_c(s)|$ să fie arbitrar alocate. Într-adevăr, alegînd A_{cmF} de forma

$$A_{cmF} = \begin{bmatrix} 0 \ldots 1 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0 \\ -\alpha_0 - \alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

Scanned with OKEN Scanner

unităţile găsindu-se în coloanele cu indicii d_1+1, d_1+d_2+1, ..., $d_1+\ldots+d_{m-1}+1$, iar ultima linie fiind formată din coeficienţii cu semn schimbat ai polinomului $\pi(s)$ ale cărei rădăcini se doresc a fi alocate,

$$\pi(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n \tag{2.84}$$

rezultă din (2.80) şi (2.78),

$$F_c(s) = \Gamma_c(A_{cmF} - A_{cm})\, S_c(s) \tag{2.85}$$

cu A_{cmF} dat de (2.83), care este tocmai $F_c(s)$ căutat. Justificarea procedurii este imediată, observînd că

$$A_c + B_c F_c = A_c + B_{c0}\Gamma_c^{-1}\Gamma_c(A_{cmF} - A_{cm}) = A_c + B_{c0}(A_{cmF} - A_{cm}) \tag{2.86}$$

este companionul matriceal asociat lui (2.84), iar conform corolarului 2.4

$$|P_c(s) - F_c(s)| = \alpha|sI - (A_c + B_c F_c)| \tag{2.87}$$

cu $\alpha = \text{ct.} \neq 0$, corolarul fiind astfel complet demonstrat.

Observînd acum că dacă în reprezentarea polinomială standard controlabilă $(P_c(s), I_m, R(s), 0)$ sau explicit

$$P_c(s)\, z(s) = u(s) \tag{2.88}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) \tag{2.89}$$

facem

$$u(s) = F_c(s)\, z(s) + v(s) \tag{2.90}$$

unde $F_c(s)$ este $m \times m$ arbitrară satisfăcînd (2.76), rezultă

$$(P_c(s) - F_c(s))\, z(s) = v(s) \tag{2.91}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) \tag{2.92}$$

adică reprezentarea polinomială standard controlabilă $(P_c(s) - F(s), I_m, R(s), 0)$, se justifică.

Definiţia 2.10. Fie sistemul în reprezentarea polinomială de stare parţială standard controlabilă $(P_c(s), I_m, R(s), 0)$. Atunci (2.90), cu restricţia (2.76), se numeşte lege de comandă (după starea parţială $z(s)$) pentru sistemul considerat.

O teorie similară se construieşte prin dualitate pentru reprezentarea polinomială standard observabilă $(P_o(s), Q(s), I_p, 0)$.

În acest sens, se introduc :

$$\tilde{d}_i = \partial_{ri}[P_o(s)] \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{2.93}$$

$$n \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{p} \tilde{d}_i = \partial[|P_o(s)|] \tag{2.94}$$

$$\Gamma_r \overset{\Delta}{=} \Gamma_r[P_o(s)], \tag{2.95}$$

$$P_{op}(s) \overset{\Delta}{=} P_o(s)\, \Gamma_r^{-1} \tag{2.96}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$P_{op}(s) = \operatorname{diag}(s^{\tilde{d}_i}) - S_o(s)\, A_{op} \tag{2.97}$$

unde

$$S_o(s) \triangleq \begin{bmatrix} 1 & s \ldots s^{\tilde{d}_1-1} & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots 0 & 1\, s \ldots s^{\tilde{d}_2-1} & \ldots\ldots 0 \\ & \vdots & \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 & 1\, s \ldots s^{\tilde{d}_p-1} & \end{bmatrix}, \tag{2.98}$$

D prin

$$T(s) = P_o^{-1}(s)\, Q(s) = D + P_o^{-1}(s)\, Q_o(s) \tag{2.99}$$

cu

$$\partial_r[Q_o(s)] < \partial_r\,[P_o(s)], \tag{2.100}$$

B_o prin

$$Q_o(s) = S_o(s) B_o, \tag{2.101}$$

A_o, C_{o0} prin

$$A_o = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_2} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_p} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c} \begin{matrix} 0 & & x \\ 1 & & x \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & x \end{matrix} & \begin{matrix} & & x \\ & & x \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} & \begin{matrix} & & x \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} & & x \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & x \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & x \end{matrix} & \begin{matrix} & & x \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} & & x \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} & \begin{matrix} & & x \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & x \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & x \\ 1 & & x \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & x \end{matrix} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \tilde{d}_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \tilde{d}_2 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \tilde{d}_p \end{array} \tag{2.102}$$

$$C_{o0} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_2} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{d}_p} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c} 0 \ldots 0\ 1 & & \\ \hdashline & 0 \ldots 0\ 1 & \\ \hdashline & & \\ \hdashline & & 0 \ldots 0\ 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{2.103}$$

unde coloanele „x" sînt coloanele lui A_{op} în aceeași succesiune, și în final

$$C_o \triangleq \Gamma_r^{-1} C_{o0} \tag{2.104}$$

Atunci, sistemul (A_o, B_o, C_o, D) este un echivalent de stare al reprezentării $(P_o(s), Q(s), I_p, 0)$, pentru care introducem,

DEFINIȚIA 2.11. Fie sistemul în reprezentarea polinomială de stare parțială standard observabilă $(P_o(s), Q(s), I_p, 0)$. Sistemul (A_o, B_o, C_o, D), introdus mai sus, se numește echivalent de stare standard observabil al reprezentării polinomiale considerate. Întregii $\tilde{d}_i$, $i = 1, \ldots, p$ și $\nu \stackrel{\Delta}{=} \max_i \tilde{d}_i$ se numesc indici și respectiv indicele de observabilitate al perechii $(P_o(s), Q(s))$.

Rezultă imediat rezultatul dual din corolarul 2.2,

$$\begin{aligned} T(s) &= C_o(sI - A_o)^{-1}B_o + D = P_o^{-1}(s)\, Q(s) = \\ &= P_o^{-1}(s)\ (S_o(s)B_o + P_o(s)\, D) = \\ &= P_o^{-1}(s)\, S_o(s)B_o \end{aligned} \tag{2.105}$$

precum și dualul algoritmului de realizare din corolarul 2.3 (cititorul scriindu-l ca exercițiu).

Trecem acum la *construcția echivalentului de stare al unui sistem în reprezentarea polinomială de stare parțială* (generală) $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$, $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$, $W(s)$ fiind $q \times q$, $q \times m$, $p \times q$ și $p \times m$, respectiv. Matricea polinomială asociată este

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix}. \tag{2.106}$$

Vom proceda astfel:

Prin operații unimodulare asupra primelor q coloane se face $P(s)$ coloană proprie, rezultînd

$$\Pi^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} P_c(s) & -Q(s) \\ R_1(s) & W(s) \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

unde $P_c(s)$ este coloană proprie. Punem $\Gamma_c \stackrel{\Delta}{=} \Gamma_c[P_c(s)]$ și înmulțim la stînga primele q coloane cu Γ_c^{-1}, rezultînd

$$\Pi^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} P_{cq}(s) & -Q(s) \\ R_2(s) & W(s) \end{bmatrix}. \tag{2.108}$$

Exprimăm unic $R_2(s)P_{cq}^{-1}(s)$ prin suma dintre cît și partea strict proprie,

$$R_2(s)\, P_{cq}^{-1}(s) = H(s) + R_c(s)\, P_{cq}^{-1}(s). \tag{2.109}$$

În $\Pi^{(2)}(s)$ scădem din ultimele p linii, primele q linii înmulțite la stînga cu $H(s)$, rezultînd conform cu (2.109)

$$\Pi^{(3)}(s) = \begin{bmatrix} P_{cq}(s) & -Q(s) \\ R_c(s) & W_1(s) \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

unde

$$W_1(s) \stackrel{\Delta}{=} W(s) + H(s)\, Q(s). \tag{2.111}$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul asociat lui $\Pi^{(3)}(s)$

$$P_{cq}(s)\,\zeta(s) = Q(s)\,u(s) \tag{2.112}$$

$$y(s) = R_c(s)\,\zeta(s) + W_1(s)\,u(s) \tag{2.113}$$

se rescrie în forma

$$\begin{aligned} P_{cq}(s)\,\zeta(s) - v(s) &= 0 \\ R_c(s)\,\zeta(s) - \eta(s) &= 0 \\ v(s) &= Q(s)\,u(s) \\ \eta(s) + W_1(s)\,u(s) &= y(s) \end{aligned} \tag{2.114}$$

unde noua stare parțială este $[\zeta^T(s)\ v^T(s)\ \eta^T(s)]^T$. Atunci matricea polinomială asociată este

$$\Pi^{(4)}(s) = \left[\begin{array}{ccc:c} P_{cq}(s) & -I_q & 0 & 0 \\ R_c(s) & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & I_q & 0 & -Q(s) \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.115}$$

Observăm acum că prin operații de strictă echivalență evidente $\Pi^{(4)}(s)$ poate fi adus la forma

$$\hat{\Pi}^{(4)}(s) = \left[\begin{array}{c:cc:c} P_{cq}(s) & 0 & 0 & -Q(s) \\ \hdashline 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q & 0 \\ \hdashline R_c(s) & 0 & 0 & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.116}$$

Fie acum

$$\Pi_e^{(4)}(s) = \left[\begin{array}{ccc:cc} I_{n-q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{cq}(s) & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & R_c(s) & 0 & -I_p & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & I_q & 0 & -Q(s) \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & I_p & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.117}$$

Conform teoremei 2.2 (vezi și operațiile de strictă echivalență efectuate în demonstrație) $\Pi_e^{(4)}(s)$ este strict echivalentă cu

$$\Pi_E^{(4)}(s) = \left[\begin{array}{ccc:c} sI_n - A_c & -B_{c0} & 0 & 0 \\ C_c & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & I_q & 0 & -Q(s) \\ \hdashline 0 & 0 & I_p & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.118}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $n \triangleq \partial[|P_{cm}(s)|]$ $(= \partial[|P(s)|]$) este ordinul sistemului, iar $(A_c, B_{c0}, C_c, 0)$ este echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării standard controlabile $(P_{cq}(s), I_q, R_c(s), 0)$.
Prin operații de strictă echivalență evidente $\Pi_E^{(4)}(s)$ poate fi adus la

$$\hat{\Pi}_E^{(4)}(s) = \left[\begin{array}{ccc:c} sI_n - A_c & 0 & 0 & -B_{c0}Q(s) \\ 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q & 0 \\ \hdashline C_c & 0 & 0 & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.119}$$

Comparînd (2.119) cu (2.116) și ținînd cont de (2.117), rezultă că

$$\hat{\Pi}_e(s) \triangleq \left[\begin{array}{ccc:c} I_{n-q} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & P_{cq}(s) & -Q(s) \\ \hdashline 0 & R_c(s) & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.120}$$

$$\hat{\Pi}_E(s) = \left[\begin{array}{cc:c} sI_n & -A_c & -B_{c0}Q(s) \\ & C_c & W_1(s) \end{array}\right] \tag{2.121}$$

sînt strict echivalente. Întrucît diagonala lui $sI_n - A_c$ constă din polinoame monice de gradul 1, prin substracții adecvate ale primelor n coloane ale lui $\hat{\Pi}_E(s)$ din ultimele m, matricea $B_{c0}Q(s)$ poate fi redusă la o matrice constantă B, rezultînd în final

$$\Pi_E(s) = \left[\begin{array}{cc:c} sI_n - A_c & -B \\ & C_c & W_2(s) \end{array}\right] \tag{2.122}$$

strict echivalentă cu (2.120). Scriind matricea de transfer asociată lui $\Pi_E(s)$, aceasta fiind proprie, rezultă că $W_2(s)$ este o matrice constantă D, (A_c, B, C_c, D) fiind echivalentul de stare căutat.

Din dezvoltările de mai sus rezultă imediat următorul

Algoritm de echivalență

Pasul 1. Prin operații de strictă echivalență (cunoscute) se aduce $\Pi(s)$ din (2.106) la forma $\Pi^{(3)}(s)$ din (2.110), determinîndu-se ordinul n al sistemului ($P_{cm}(s)$ coloană proprie).

Pasul 2. Se construiește echivalentul de stare standard controlabil $(A_c, B_{c0}, C_c, 0)$ al reprezentării polinomiale standard controlabile $(P_{cq}(s), I_q, R_c(s), 0)$ și se scrie $\hat{\Pi}_E(s)$ din (2.121).

Pasul 3. Prin substracții (de strictă echivalență) se aduce $\hat{\Pi}_E(s)$ la forma $\Pi_E(s)$ din (2.122) unde $W_2(s)$ trebuie să fie o matrice constantă. În caz contrar, matricea de transfer nu a fost proprie.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 2.2. Fie sistemul avînd matricea polinomială asociată

$$\Pi(s)=\left[\begin{array}{c|c} P(s) & -Q(s) \\ \hline R(s) & W(s) \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc} s^2+s+1 & s^2+s+2 & s+2 & 0 \\ s+2 & 2s+3 & 1 & s \\ \hline s^3+s^2+2s+1 & s^3+s^2+3s+1 & s^2+2s+1 & 0 \\ s^2+2s+1 & 2s^2+3s & s & s^2+1 \end{array}\right]$$

pentru care se cere un echivalent de stare.

Pasul 1. Prin scăderea primei coloane din a doua se obține (vezi (2.107))

$$\Pi^{(1)}(s)=\begin{bmatrix} P_c(s) & -Q(s) \\ R_1(s) & W(s) \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc} s^2+s+1 & 1 & s+2 & 0 \\ s+2 & s+1 & 1 & s \\ \hline s^3+s^2+2s+1 & s & s^2+2s+1 & 0 \\ s^2+2s+1 & s^2+s-1 & s & s^2+1 \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} P_{cq}(s) & -Q(s) \\ R_2(s) & W(s) \end{bmatrix}=\Pi^{(2)}(s) \text{ (vezi (2.108))},$$

întrucît $\Gamma_c[P_c(s)]=I_2$. Scriind (2.109) avem

$$R_2(s)P_{cq}^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+s+1 & 1 \\ s+2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}=$$

$$=H(s)+R_c(s)P_{cq}^{-1}(s)$$

de unde, prin substragerea primelor două linii din $\Pi^{(2)}(s)$, înmulțite cu $H(s)$, din ultimele două, rezultă (vezi (2.110))

$$\Pi^{(3)}(s)=\begin{bmatrix} P_{cq}(s) & -Q(s) \\ R_c(s) & W_1(s) \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc} s^2+s+1 & 1 & s+2 & 0 \\ s+2 & s+1 & 1 & s \\ \hline s+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pasul 2. Echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării $(P_{cq}(s),\ I_q,\ R_c(s),\ 0)$ este (exercițiu pentru cititor)

$$A_c=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad B_{c0}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad C_c=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde (vezi 2.121)

$$\hat{\Pi}_E(s) = \begin{bmatrix} sI_3 - A_c & -B_{c0}Q(s) \\ C_c & W_1(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s+1 & 1 & s+2 & 0 \\ 2 & 1 & s+1 & 1 & s \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

de unde scăzînd coloana a 2-a din a 4-a și a 3-a din a 5-a rezultă

$$\Pi_E(s) = \begin{bmatrix} sI_3 - A_c & -B \\ C_c & D \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} s & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & s+1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & s+1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

adică echivalentul de stare este (A_c, B, C_c, D), unde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Introducem acum noțiunea de *echivalență a două sisteme* prin

DEFINIȚIA 2.12. Două sisteme în reprezentarea polinomială de stare parțială se numesc echivalente dacă au aceeași matrice de transfer.

Rezultînd imediat că *două sisteme în reprezentarea polinomială de stare parțială strict echivalente sînt echivalente.*

Fie $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$, o reprezentare polinomială de stare parțială. Vom numi *matrice rațională asociată* orice matrice rațională $\Theta(s)$

$$\Theta(s) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(s) & -\Theta_{12}(s) \\ \Theta_{21}(s) & \Theta_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{2.123}$$

cu $\Theta_{11}(s)$ nesingulară, pentru care

$$T(s) = \Theta_{21}(s)\,\Theta_{11}^{-1}(s)\,\Theta_{12}(s) + \Theta_{22}(s) \tag{2.124}$$

unde $T(s)$ este matricea de transfer asociată reprezentării polinomiale de stare parțială $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$.

Două matrici raționale asociate se numesc echivalente dacă generează prin regula (2.124) *aceeași matrice de transfer.* Avem imediat că : *două matrici raționale asociate* $\Theta(s)$ și $\Psi(s)$ *sînt echivalente dacă și numai dacă* :

$$\text{a)} \begin{bmatrix} \Psi_{11}(s) & -\Psi_{12}(s) \\ \Psi_{21}(s) & \Psi_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{11}(s) & -\Theta_{12}(s) \\ \Theta_{21}(s) & \Theta_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \tag{2.125}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $M(s)$, $N(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ *sînt matrici raționale cu* $M(s)$ și $N(s)$ *nesingulare*, sau

b) $\Psi(s)$ este de forma

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \Theta(s) \end{bmatrix} \tag{2.126}$$

(r oricare). Lăsăm demonstrația ca exercițiu cititorului. Operațiile descrise de (2.125) și (2.126) se numesc *operații de echivalență* (peste $\mathbb{R}(s)$).

În particular, matricea polinomială asociată unei reprezentări este o matrice rațională asociată.

Exemplul 2.3. Dacă $\Pi(s)$ este matricea polinomială asociată reprezentării de mai sus, se vede că

$$\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{-1}(s) & 0 \\ -R(s)\ P^{-1}(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & -P^{-1}(s)\ Q(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

care este echivalentă cu $T(s)$ (matricea de transfer asociată).

DEFINIȚIA 2.13. Sistemul $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ în reprezentarea polinomială de stare parțială se numește stabil (sau intern stabil) dacă zerourile lui $|P(s)|$, numiți și polii sistemului se găsesc în $\mathbb{C}^-$. Sistemul se numește stabil intrare/ieșire dacă polii matricii de transfer, privită ca matrice rațională, sînt în $\mathbb{C}^-$.

Este clar că dacă sistemul de mai sus este stabil (stabil în sens intrare/ieșire) orice echivalent de stare al său este stabil (stabil intrare/ieșire) și reciproc.

Avem imediat

TEOREMA 2.3. *Fie sistemul* $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ *în reprezentarea polinomială de stare parțială controlabil și observabil. Atunci el este stabil dacă și numai dacă este stabil intrare/ieșire.*

Demonstrație. Necesitatea este evidentă. Pentru suficiență fie

$$T(s) = R(s)\ P^{-1}(s)\ Q(s) + W(s) \tag{2.127}$$

unde, conform ipotezei din teoremă, $R(s)$, $P(s)$ sînt coprime la dreapta, iar $P(s)$, $Q(s)$ coprime la stînga. Fie

$$P^{-1}(s)\ Q(s) = R_c(s)\ P_c^{-1}(s) \tag{2.128}$$

unde membrul drept este o factorizare primă la dreapta a membrului stîng. Atunci (vezi teorema 10 din anexa A2)

$$P_c(s) = \alpha\ |P(s)| \quad (\alpha = \text{ct} \neq 0). \tag{2.129}$$

Fie

$$\tilde{R}(s) \triangleq R(s)R_c(s). \tag{2.130}$$

Atunci, din egalitatea evidentă $\tilde{R}(s)P_c^{-1}(s) = R(s)P^{-1}(s)\ Q(s)$ rezultă că $\tilde{R}(s)$ și $P_c(s)$ sînt coprime la dreapta. În consecință

$$T(s) = (\tilde{R}(s) + W(s)\ P_c(s))\ P_c^{-1}(s), \tag{2.131}$$

unde membrul drept este o factorizare primă la dreapta a lui $T(s)$. Atunci din (2.129) și (2.131) rezultă că polii lui $T(s)$ sînt zerourile lui $|P(s)|$ și teorema este complet demonstrată.

DEFINIȚIA 2.14. Fie $(P(s), Q(s), R(s), W(s))$ un sistem în reprezentarea polinomială de stare parțială și

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} P(s) & -Q(s) \\ R(s) & W(s) \end{bmatrix} \tag{2.132}$$

matricea polinomială asociată. Se numesc zerourile sistemului, zerourile matricii polinomiale $\Pi(s)$.

Este clar că dacă (A, B, C, D) este un echivalent de stare, zerourile sînt zerourile matricii polinomiale

$$\Pi_E(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

Avem

TEOREMA 2.4. *Fie $(P(s), Q(s), R(s)), W(s))$ un sistem în reprezentarea polinomială de stare parțială, controlabil și observabil. Atunci zerourile acestuia sînt zerourile matricii de transfer.*

Demonstrația este identică cu cea din teorema 2.3.

2.3. CONTROLABILITATEA LA IEȘIRE

Noțiunea de controlabilitate la ieșire intervine esențial în Capitolul 6 și, de aceea, i s-a alocat un paragraf separat.

Fie $T(s)$ o matrice rațională reprezentată unic prin suma dintre cîtul ei și partea strict proprie

$$T(s) = M(s) + T_1(s) \tag{2.134}$$

($M(s)$ polinomială). Notăm cu

$$[T(s)]_0 \triangleq M(0) \tag{2.135}$$

Introducem acum

DEFINIȚIA 2.15. Sistemul avînd $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$ se numește controlabil la ieșire dacă

$$\mathscr{C}_T \triangleq \{[T(s)\, u(s)]_0 \mid u(s) \in \mathbb{R}^m(s)\} = \mathbb{R}^p \tag{2.136}$$

Interpretarea definiției derivă din observația că, dacă $y(s) = T(s)\, u(s)$, atunci pentru $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\, y(s)$ avem (teorema valorii inițiale) la $t = 0_+$

$$y(0_+) = [T(s)\, u(s)]_0 . \tag{2.137}$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, sistemul este controlabil la ieșire dacă pentru orice $y \in \mathbb{R}^p$ există o comandă $u(s) \in \mathbb{R}^m(s)$, astfel încît dacă $y(s) = T(s)u(s)$, atunci $y(0_+) = y$.

Fie

$$T(s) = R(s)\, P^{-1}(s) \tag{2.138}$$

o factorizare oarecare la dreapta a lui $T(s)$. Fie

$$R(s) = [R_1(s), \ldots, R_m(s)] \tag{2.139}$$

evidențiată prin coloanele $R_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$. Scriem acum

$$R_i(s) = R_{i0} + R_{i1}s + \ldots + R_{iq_i}\, s^{q_i},\ i = 1, \ldots, m \tag{2.140}$$

și notăm

$$\mathscr{R}[R(s)] \triangleq [R_{10} \ldots R_{1q_1} \vdots \ldots \vdots R_{m0} \ldots R_{mq_m}]. \tag{2.141}$$

Avem atunci

TEOREMA 2.5. *Fie un sistem avînd matricea de transfer $T(s)$ și (2.138) o factorizare la dreapta arbitrară a acesteia. Atunci sistemul este controlabil la ieșire, dacă și numai dacă*

$$\text{Im}\ \mathscr{R}[R(s)] = \mathbb{R}^p \tag{2.142}$$

sau echivalent

$$\text{rang}\ \mathscr{R}[R(s)] = p. \tag{2.143}$$

Demonstrație. Fie

$$z(s) \triangleq P^{-1}(s)\, u(s) \tag{2.144}$$

Arătăm că

$$\text{Im}\ \mathscr{R}\ [R(s)] = \mathscr{C}_T. \tag{2.145}$$

Întrucît $P(s)$ este un automorfism al lui $\mathbb{R}^m(s)$ este clar că

$$\mathscr{C}_T = \{[R(s)\, z(s)]_0 \mid z(s) \in \mathbb{R}^m(s)\} \tag{2.146}$$

Fie atunci $z(s) \in \mathbb{R}^m(s)$ scris pe componente

$$z(s) = \begin{bmatrix} z^1(s) \\ \vdots \\ z^m(s) \end{bmatrix},\ z^i(s) \in \mathbb{R}(s),\ i = 1, \ldots, m \tag{2.147}$$

de unde

$$R(s)\, z(s) = z^1(s)\, R_1(s) + \ldots + z^m(s)\, R_m(s) \tag{2.148}$$

rezultînd din (2.148) că $[R(s)\, z(s)]_0$ este sigur o combinație liniară de coloanele lui $\mathscr{R}[R(s)]$ și deci $[R(s)z(s)]_0 \in \text{Im}\ \mathscr{R}[R(s)]$, adică $\mathscr{C}_T \subset \text{Im}\ \mathscr{R}[R(s)]$.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc. Fie $y \in \operatorname{Im} \mathscr{R}[R(s)]$. Atunci y este de forma

$$y = [R_{10} \ldots R_{1q_1} \vdots \ldots \vdots R_{m0} \ldots R_{mq_m}] \begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \vdots \\ \lambda_{1q_1} \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{m0} \\ \vdots \\ \lambda_{mq_m} \end{bmatrix} \tag{2.149}$$

Fie atunci $z(s) \in \mathbb{R}^m(s)$, explicitat prin (2.147), unde

$$z^i(s) = \lambda_{i0} + \lambda_{i1} s^{-1} + \ldots + \lambda_{i,q_i} s^{-q_i} \tag{2.150}$$

rezultînd imediat că

$$[R(s)\, z(s)]_0 = y \tag{2.151}$$

adică $\operatorname{Im} \mathscr{R}[R(s)] \subset \mathscr{C}_T$, de unde rezultă (2.145) adevărată.

Ţinînd cont acum de (2.145) şi de definiţia 2.15, teorema este complet demonstrată.

Observaţia 2.5. Dacă (A, B, C, D) este o realizare de ordin n a lui $T(s)$ atunci

$$\mathscr{C}_T = \operatorname{Im} [D \quad CB \ldots\ldots CA^{n-1}B] \tag{2.152}$$

(lăsăm demonstraţia ca exerciţiu pentru cititor).

Bibliografie

2.1. H.H. Rosenbrock, *State-space and multivariable theory*. Thomas Nelson & Sons LTD, 1970.
2.2. W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems*. Springer-Verlag, New York, 1974.
2.3. S. Barnet, *Matrices, polynomials, and linear time-invariant systems*. IEEE Trans. AC—**18**, 1, Febr. (1973).
2.4. S. Barnet, *Matrices in control theory*. Van Nostrand. London, 1971.
2.5. F.B. Gantmaher, *Teoria matriţ*. Izd. Nauka. Moscva, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3

Sinteza regulatoarelor liniare

Primele două părți ale acestui capitol sînt dedicate procedurilor de stabilizare : prin *reacție după stare cu estimator de lege de reacție* și prin *compensare după ieșire*. Instrumentul de calcul îl constituie tehnica *eliminantului* asociat unei factorizări prime la dreapta cu numitor coloană proprie elucidîndu-se în acest sens toate aspectele teoretice legate de această tehnică.

Trebuie precizat că, configurațiile propriu-zise de stabilizare (avînd la origine așa-numitul concept de lege de reglare, introdus de Kalman, dar considerat impropriu în prezent) nu reprezintă scheme de reglare adică nu posedă în mod necesar proprietatea intrinsecă de rejecție a perturbațiilor persistente și de urmărire a unei referințe. Pentru aceasta a fost necesar să se introducă un concept structural nou și anume cel de *model intern*, care reprezintă o „copie" a mărimilor exogene față de care sistemul trebuie să-și evidențieze capacitatea reglantă.

Cu aceste precizări, ultimul paragraf al capitolului de față, se ocupă cu „teoria polinomială" a reglării în care tehnicile prezentate în primele două paragrafe apar ca un auxiliar procedural.

3.1. STABILIZAREA PRIN REACȚIE DUPĂ STARE. ESTIMATORUL

Fie sistemul $(P(s), I_m, R(s), 0)$ în reprezentarea polinomială standard controlabilă ($P(s)$ $m \times m$ coloană proprie, $R(s)$ $p \times m$),

$$P(s)z(s) = u(s) \tag{3.1}$$

$$y(s) = R(s)z(s) \tag{3.2}$$

$$d_i \triangleq \partial_{ci}[P(s)] \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, m \tag{3.3}$$

$$n \triangleq d_1 + \ldots + d_m = \partial[|P(s)|]. \tag{3.4}$$

Problema stabilizării constă în găsirea unei legi de comandă

$$u(s) = F(s)\,z(s) + v(s) \tag{3.5}$$

$$\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)] \tag{3.6}$$

astfel încît sistemul rezultant $(P(s)-F(s), I_m, R(s), 0)$, (de asemenea în reprezentarea polinomială standard controlabilă, datorită lui (3.6))

$$(P(s) - F(s))z(s) = v(s) \tag{3.7}$$

$$y(s) = R(s)z(s) \tag{3.8}$$

să fie stabil, adică zerourile polinomului $|P(s) - F(s)|$ să fie în $\mathbb{C}^-$.

Scanned with OKEN Scanner

Direct din corolarul 2.5 avem

TEOREMA 3.1. *Fie sistemul (3.1), (3.2) în reprezentarea polinomială standard controlabilă și* $\Lambda \subset \mathbb{C}^-$, $|\Lambda| = n$ *(ordinul sistemului) un set simetric de numere complexe. Există atunci o lege de comandă (3.5) pentru care sistemul rezultant (3.7), (3.8) este stabil (vezi figura 3.1).*

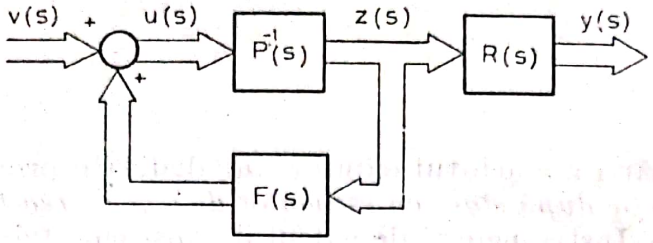


Fig. 3.1

Observația 3.1. În urma aplicării legii stabilizante (3.5) orice echivalent de stare al lui (3.7), (3.8) este (intern) stabil. Dacă $(sI-A, B, C, D)$ este reprezentarea polinomială de stare asociată echivalentului de stare standard controlabil (A, B, C, D) al reprezentării $(P(s), I_m, R(s), 0)$, atunci (3.5) devine

$$u = F\,x(s) + v(s) \tag{3.9}$$

unde starea $x(s)$ este definită prin

$$x(s) = S(s)\,z(s), \tag{3.10}$$

$S(s)$ este dat de (2.51) cu d_i definiți prin (3.3), iar F este $m \times n$ matricea constantă unică pentru care

$$F(s) = F\,S(s) \tag{3.11}$$

(vezi figura 3.2).

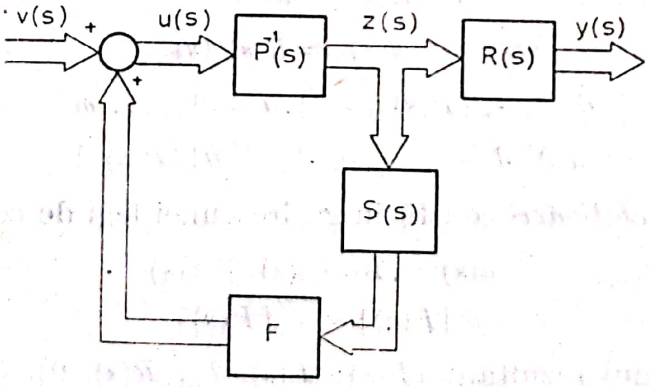


Fig. 3.2

Starea $z(s)$ nefiind în general accesibilă măsurării apare problema determinării lui $F(s)\,z(s)$ din măsura lui $u(s)$ și $y(s)$, introducînd noțiunea de *estimator de lege de reacție* prin

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 3.1. Fie sistemul (3.1), (3.2) ($P(s)$ coloană proprie) și legea de comandă (3.4). Se numește estimator de lege de reacție, sistemul $(Q(s),\ [K(s) \vdots H(s)],\ I_m,\ 0)$,

$$Q(s)\, w(s) = K(s)u(s) + H(s)\, y(s) \tag{3.12}$$

unde $Q(s)$, $K(s)$, $H(s)$ sînt $m \times m$, $m \times m$ și $m \times p$ respectiv, pentru care

$$w(s) = F(s)\, z(s). \tag{3.13}$$

Dacă $Q(s)$ este hurwitzian, estimatorul se numește stabil (vezi fig. 3.3)

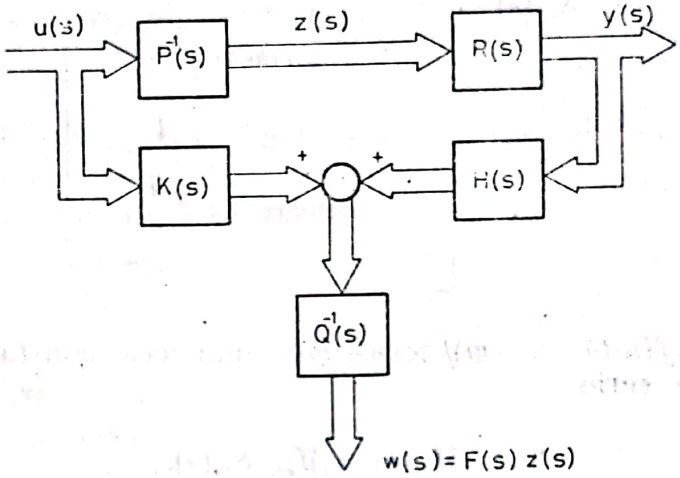


Fig. 3.3

Înlocuind $u(s)$ din (3.1), $y(s)$ din (3.2) și $w(s)$ din (3.13) în (3.12), rezultă ecuația

$$K(s)P(s) + H(s)R(s) = Q(s)\, F(s). \tag{3.14}$$

Așadar, construcția unui estimator de lege de reacție stabil (alocat) revine la găsirea matricilor $K(s)$, $H(s)$ și $Q(s)$, astfel încît

(i) $K(s)$, $H(s)$ și $Q(s)$ satisfac (3.14),

(ii) $Q^{-1}(s)\ [K(s) \vdots H(s)]$ este proprie,

(iii) $|\, Q(s)\,|$ este hurwitzian (alocat).

Pentru soluționarea acestei probleme introducem noțiunea de *eliminant* asociat reprezentării polinomiale standard controlabile $(P(s), I_m, R(s), 0)$. Fie pentru $k \geqslant 1$

$$M_{ek}(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) \\ sP(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}P(s) \\ R(s) \\ sR(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}R(s) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Întrucît $P(s)$ este coloană proprie cu $d_i \geqslant 1$ și $\partial_{ci}[R(s)] \leqslant d_i$ $i = 1, \ldots, m$, introducînd $(n+mk) \times m$, matricea polinomială,

$$S_{ek}(s) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_1+k-1} \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_2+k-1} \end{matrix} & & \\ & & \ldots\ldots\ 1 & \\ & & & \begin{matrix} s \\ \vdots \\ s^{d_m+k-1} \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

există unic definită $(p+m)k \times (n+mk)$ matricea constantă M_{ek}, astfel încît (3.15) se scrie

$$M_{ek}(s) = M_{ek}\ S_{ek}(s). \tag{3.17}$$

Matricea M_{ek} astfel introdusă se numește *eliminantul de ordinul k al perechii* $(P(s), R(s))$ *cu* $P(s)$ *coloană proprie.*

Fie acum (A, B, C, D) echivalentul standard controlabil al reprezentării standard controlabile $(P(s), I_m, R(s), 0)$.

Introducem

$$Q_k \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Avem atunci

LEMA 3.1.

$$\text{rang } M_{ek} = \text{rang } Q_k + mk \tag{3.19}$$

Demonstrație. Din reprezentarea polinomială de stare asociată echivalentului (A, B, C, D)

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \tag{3.20}$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \tag{3.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $x(s)$ dat de (3.10), rezultă

$$\begin{aligned} sy(s) &= CAx(s) + C\,Bu(s) + Dsu(s) \\ s^{k-1}y(s) &= CA^{k-1}x(s) + CA^{k-2}Bu(s) + \ldots + CBs^{k-2}\,u(s) + Ds^{k-1}\,u(s) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Înlocuind în (3.21) și (3.22), $u(s)$, $y(s)$ și $x(s)$ din (3.1), (3.2) și (3.10) respectiv obținem egalitățile

$$\begin{aligned} R(s) &= CS(s) + DP(s) \\ sR(s) &= CAS(s) + CBP(s) + DsP(s) \\ s^{k-1}R(s) &= CA^{k-1}S(s) + CA^{k-2}\,BP(s) + \ldots + CBs^{k-2}P(s) + Ds^{k-1}P(s) \end{aligned} \tag{3.22'}$$

Înlocuind acum (3.22') în (3.15) rezultă

$$M_{ck}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ sP(s) \\ s^{k-1}P(s) \\ CS(s) + DP(s) \\ CAS(s) + CBP(s) + DsP(s) \\ CA^{k-1}\,S(s) + CA^{k-2}BP(s) + \ldots + CBs^{k-2}P(s) + Ds^{k-1}\,P(s) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Prin substracții vizibile ale primelor k bloc linii, adecvat multiplicate, din ultimele k bloc linii, se obține

$$UM_{ek}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ sP(s) \\ s^{k-1}P(s) \\ CS(s) \\ CAS(s) \\ CA^{k-1}\,S(s) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

unde U este o matrice constantă de substracție (nesingulară).
Fie

$$P_m(s) = \Gamma_c^{-1}\,P(s) \tag{3.25}$$

cu $\Gamma_c \triangleq \Gamma_c[P(s)]$. Atunci (vezi (2.57))*) $P_m(s)$ se scrie

$$P_m(s) = \text{diag}\,(s^{d_i}) - A_m\,S(s). \tag{3.26}$$

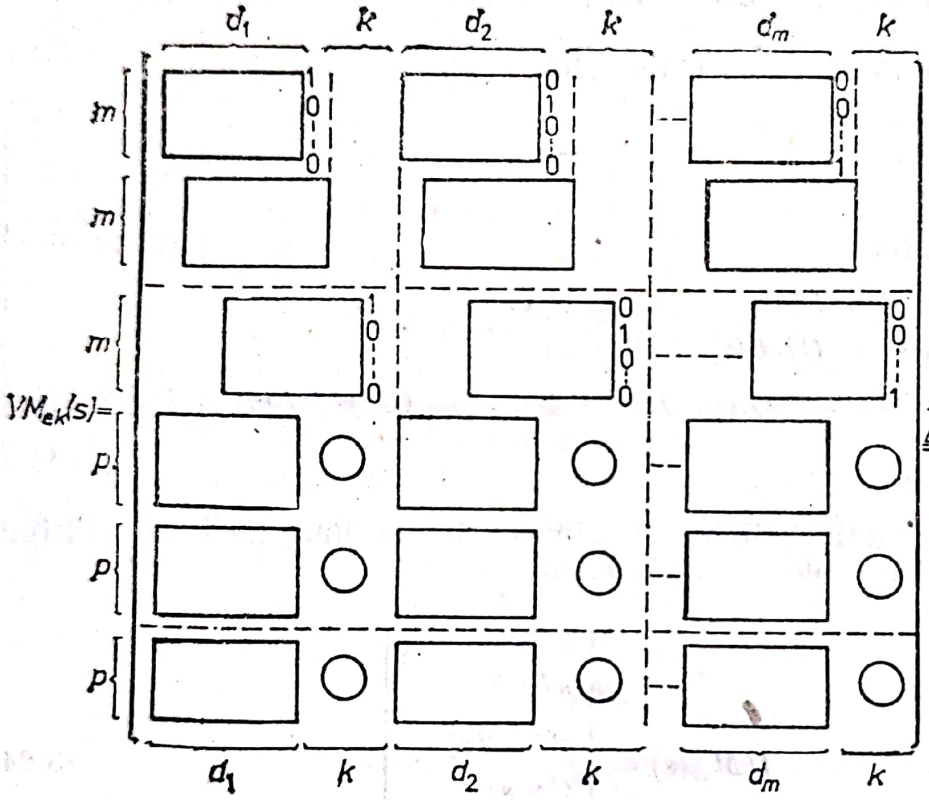
*) Indicele c din elementele definitorii ale echivalentului de stare standard controlabil a fost suprimat.

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind primele k bloc linii, fiecare, cu Γ_c^{-1} rezultă

$$VM_{ek}(s) = \begin{bmatrix} P_m(s) \\ sP_m(s) \\ \hdots\hdots \\ s^{k-1}P_m(s) \\ CS(s) \\ CAS(s) \\ \hdots\hdots \\ CA^{k-1}S(s) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

cu V, de asemenea, matrice constantă nesingulară. Înlocuind (3.26) în (3.27), avem, detaliat, structura lui $VM_{ek}(s)$ de forma



(3.28)

unde în $\widetilde{M}_{ek}$, prin juxtapunerea $m \times d_i$ blocurilor, $i = 1, \ldots, m$ din prima, a doua ... ak^{-a} bloc linie, rezultă succesiv de fiecare dată matricea A_m, iar prin juxtapunerea $p \times d_i$ blocurilor, $i = 1, \ldots, m$ din a $(k+1)^{-a}$, a $(k+2)^{-a}$ ... ... a $2k^{-a}$ bloc linie rezultă succesiv C, CA, ..., CA^{k-1}.

Din inspectarea matricii $\widetilde{M}_{ek}$ rezultă că primele mk linii sînt liniar independente și independente de ultimele pk linii. Așadar

$$\text{rang } M_{ek} = km + \text{rang } Q_k. \tag{3.29}$$

Comparînd acum (3.28) cu (3.17) rezultă

$$\widetilde{M}_{ek}\, S_{ek}(s) = VM_{ek}\, S_{ek}(s). \tag{3.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd cont de structura lui $S_{ek}(s)$ şi de identitatea polinoamelor care compun cei doi membri ai lui (3.30) rezultă că

$$\tilde{M}_{ek} = V M_{ek} \tag{3.31}$$

de unde din (3.29) şi din nesingularitatea lui V rezultă (3.19).

COROLARUL 3.1. Dacă perechea (C, A) este observabilă cu indicele de observabilitate ν, atunci $M_{e\nu}$ este de rang maximal coloană, iar

$$\text{rang } M_{ek} = km + n \quad \text{cu} \quad k \geqslant \nu. \tag{3.32}$$

Într-adevăr, ţinînd cont că numărul de coloane ale lui M_{ek} este $n + mk$ şi de faptul că rang $Q_k = n$, $k \geqslant \nu$, rezultă direct din (3.19), (3.32) şi maximalitatea rangului coloană a lui M_{ek} cu $k \geqslant \nu$. Mai mult, dacă (C, A) este observabilă, indicele de observabilitate poate fi interpretat ca primul întreg k pentru care M_{ek} este de rang maximal coloană $(= n + mk)$.

Observaţia 3.2. Dacă $R(s)$ şi $P(s)$ sînt coprime la dreapta, atunci echivalentul de stare standard controlabil (A, B, C, D) este şi observabil. Fie acum matricea de transfer $T(s) = R(s)\, P^{-1}(s)$, factorizată prim la stînga

$$T(s) = \bar{P}^{-1}(s)\, Q(s) \tag{3.33}$$

cu $\bar{P}(s)$ linie proprie generînd reprezentarea polinomială standard observabilă $(\bar{P}(s), Q(s), I_p, 0)$ care este şi controlabilă. În consecinţă, echivalentul de stare standard observabil $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ al acestei reprezentări este şi controlabil. Aşadar, cei doi echivalenţi (A, B, C, D) şi $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ sînt două realizări complete ale aceleiaşi matrici de transfer $T(s)$, fiind deci două sisteme izomorfe şi deci, cele două sisteme au acelaşi indice de observabilitate ν. Dar, indicele ν privit ca indice de observabilitate al lui $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, D)$ este furnizat direct de

$$= \max_i \ \partial_{ri}[\bar{P}(s)] \tag{3.34}$$

relaţie care indică un mod de determinare a lui ν fără a apela la echivalenţii de stare.

Se poate acum introduce

DEFINIŢIA 3.2. Fie $(P(s), I_m, R(s), 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă cu $R(s)$, $P(s)$ coprime la dreapta şi fie (3.33) o factorizare primă la stînga cu numitor linie proprie a matricii de transfer asociate. Atunci ν definit prin (3.34) se numeşte indicele de observabilitate al perechii $(P(s), R(s))$. În mod dual se defineşte indicele de controlabilitate μ al perechii $(\bar{P}(s), Q(s))$, unde $(\bar{P}(s), Q(s), I_p, 0)$ este o reprezentare polinomială standard observabilă cu $\bar{P}(s)$, $Q(s)$ coprime la stînga.

LEMA 3.2. Fie $(P(s), I_m, R(s), 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă şi M_{ek} eliminantul de un ordin oarecare k al perechii $(P(s), R(s))$. Atunci $R(s)$, $P(s)$ sînt coprime la dreapta dacă şi numai dacă există un (cel mai mic) întreg ν pentru care $M_{e\nu}$ este de rang maximal coloană egal cu $\nu m + n$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Necesitatea rezultă direct din corolarul 3.1. și observația 3.2. Pentru suficiență, fie $M_{e\nu}$ de rang maximal coloană ($=\nu m+n$) și $D(s)$ o $m\times m$ matrice polinomială cu

$$\partial_{ci}[D(s)] \leqslant d_i + \nu - 1,\ i=1,\ldots,m \tag{3.35}$$

Este clar atunci că există unic o $m\times(n+m\nu)$ matrice constantă D astfel încît

$$D(s) = DS_{e\nu}(s). \tag{3.36}$$

Fie atunci ecuația

$$[K \quad H]\, M_{e\nu} = D \tag{3.37}$$

unde K și H sînt $m\times \nu m$ și $m\times \nu p$ matrici constante necunoscute. Întrucît $M_{e\nu}$ este de rang maximal coloană (3.37) are sigur o soluție

$$[K \quad H] = DM^{s}_{e\nu} \tag{3.38}$$

unde $M^{s}_{e\nu}$ este o inversă la stînga a lui $M_{e\nu}$. Explicitînd partițiile

$$K = [K_0 \vdots K_1 \vdots \ldots \vdots K_{\nu-1}] \tag{3.39}$$

$$H = [H_0 \vdots H_1 \vdots \ldots H_{\nu-1}] \tag{3.40}$$

unde K_i și H_i sînt $m\times m$ și $m\times p$ respectiv, $i=0,1,\ldots,\nu-1$ avem din (3.37) prin înmulțire la dreapta cu $S_{e\nu}(s)$ și ținînd cont de (3.15), (3.17) și (3.36), precum și de (3.39), (3.40)

$$[K_0\, K_1 \ldots K_{\nu-1} \quad H_0\, H_1 \ldots H_{\nu-1}] \begin{bmatrix} P(s) \\ sP(s) \\ s^{\nu-1}P(s) \\ R(s) \\ sR(s) \\ s^{\nu-1}(Rs) \end{bmatrix} =$$

$$= K(s)P(s) + H(s)R(s) = D(s) \tag{3.41}$$

unde

$$K(s) \triangleq K_0 + K_1 s + \ldots + K_{\nu-1}\, s^{\nu-1} \tag{3.42}$$

$$H(s) \triangleq H_0 + H_1 s + \ldots + H_{\nu-1}\, s^{\nu-1}. \tag{3.43}$$

Așadar, există $m\times m$ și $m\times p$ matricile polinomiale $K(s)$ și $H(s)$ definite prin (3.42) și (3.43), respectiv, astfel încît (3.41) este adevărată. Luînd în particular

$$D(s) = I_m \tag{3.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

care satisface evident (3.35), (3.41) devine

$$K(s)\,P(s) + H(s)R(s) = I_m \tag{3.45}$$

relație care arată (vezi corolarul 5 din anexa A2) că $P(s)$ și $R(s)$ sînt coprime la dreapta.

Observația 3.3. Fie întregii $q_1, \ldots, q_m \geqslant 1$ și $\tilde{q}_i \triangleq q_1 + \ldots + q_i$ $i = 1, \ldots, m$. Fie $m \times m$ matricea polinomială

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} s^{q_1} & -1 & & 0 \ldots & 0 \\ 0 & s^{q_2} & & -1 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s^{q_{m-1}} & -1 \\ \pi_0(s) & \pi_1(s) & \ldots & \pi_{m-2}(s) & s^{q_m} + \pi_{m-1}(s) \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

unde $\pi_i(s)$, $i = 0, \ldots, m-1$ sînt polinoame arbitrare. Atunci

$$|\tilde{D}(s)| = \pi_0(s) + s^{\tilde{q}_1}\pi_1(s) + s^{\tilde{q}_2}\pi_2(s) + \ldots + s^{\tilde{q}_{m-1}}\pi_{m-1}(s) + s^{\tilde{q}_m} \tag{3.47}$$

(exercițiu pentru cititor). Dacă

$$\partial[\pi_i(s)] < q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{3.48}$$

atunci $\tilde{D}(s)$ este coloană proprie cu $\partial_{ci}[\tilde{D}(s)] = q_i$ și $\Gamma_c[\tilde{D}(s)] = I_m(\tilde{D}^T(s)$ este linie proprie cu $\partial_{ri}[\tilde{D}^T(s)] = q_i$ și $\Gamma_r[\tilde{D}^T(s)] = I_m)$. Să mai observăm că orice polinom monic $\pi(s)$ de grad $\tilde{q}_m$ se poate pune unic sub forma (3.47) unde $\pi_i(s)$ satisfac (3.48).

Din lema 3.2. și observația 3.3. avem imediat

COROLARUL 3.2. Fie $(P(s), I_m, R(s), 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă cu $P(s)$ și $R(s)$ coprime la dreapta și $\pi(s)$ un polinom de gradul $n + m(\nu - 1)$ unde ν este indicele de observabilitate al perechii $(P(s), R(s))$. Fie $q_i \triangleq d_i + \nu - 1$ (cu d_i definiți prin (3.3)) și polinoamele $\pi_i(s)$ obținute din $\pi(s)$ prin reprezentarea (3.47) (lucru posibil întrucît $\tilde{q}_m = n + m(\nu - 1)$). Atunci există matricile polinomiale $K(s)$ și $H(s)$ de forma (3.42), (3.43) pentru care (3.41) este satisfăcută unde $D(s) = \tilde{D}(s)$ cu $\tilde{D}(s)$ construit prin (3.46) pentru $q_i = d_i + \nu - 1$ și $\pi_i(s)$ obținuți din $\pi(s)$. Într-adevăr, este suficient să observăm că $\partial_{ci}[D(s)] = d_i + \nu - 1$, condiția (3.35) fiind îndeplinită. De asemenea, $|D(s)| = \pi(s)$.

Avem acum

TEOREMA 3.2. *Fie $(P(s), I_m, R(s), 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă care este și observabilă, adică $P(s)$ și $R(s)$ sînt coprime la dreapta. Atunci pentru orice $m \times m$ matrice polinomială $F(s)$ cu $\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)]$ există matricile polinomiale $K(s)$, $H(s)$ și $Q(s)$ care satisfac condițiile (i), (ii) și (iii). Altfel spus, dacă sistemul este observabil, atunci pentru orice lege de reacție se poate construi un estimator stabil (alocat).*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie ν indicele de observabilitate al perechii $(P(s), R(s))$ și polinomul $\pi(s)$ de grad $m(\nu-1)$, avînd toate rădăcinile arbitrar plasate în $\mathbb{C}^-$. Fie pentru $q_i = \nu-1$, $i=1,\ldots,m$, polinoamele $\pi_i(s)$, $i=1,\ldots,m$ obținute din reprezentarea (3.47) a lui $\pi(s)$ (lucru posibil, întrucît $\sum_{i=1}^{m} q_i = m\,(\nu-1)$). Fie, de asemenea $m\times m$ matricea polinomială

$$Q(s) \triangleq \tilde{D}^T(s) \tag{3.49}$$

cu $\tilde{D}(s)$ dat de (3.46) în care $q_i = \nu-1$ iar $\pi_i\,(s)$ au fost obținuți mai sus. Evident, $Q(s)$ este linie proprie cu

$$\partial_{ri}[Q(s)] = \nu-1,\quad i=1,\ldots,m \tag{3.50}$$

și

$$|Q(s)| = \pi(s). \tag{3.51}$$

Din (3.50) și $\partial_{ci}[F(s)] < d_i$, $i=1,\ldots,m$ rezultă că

$$D(s) \triangleq Q(s)\,F(s) \tag{3.52}$$

satisface inegalitatea (3.35). Atunci, întrucît $P(s)$ și $R(s)$ sînt coprime la dreapta, rezultă din lema 3.2 (partea de suficiență)că, există matricile $K(s)$ și $H(s)$ care satisfac ecuația (3.14), condiția (i) fiind deci îndeplinită. Din (3.42), (3.43), (3.50) și faptul că $Q(s)$ este linie proprie, rezultă îndeplinirea condiției (ii). În fine, condiția (iii) rezultă direct din (3.51), teorema fiind complet demonstrată.

Schema completă de realizare a unei legi de comandă cu ajutorul unui estimator de lege de reacție este ilustrată în figura 3.4.

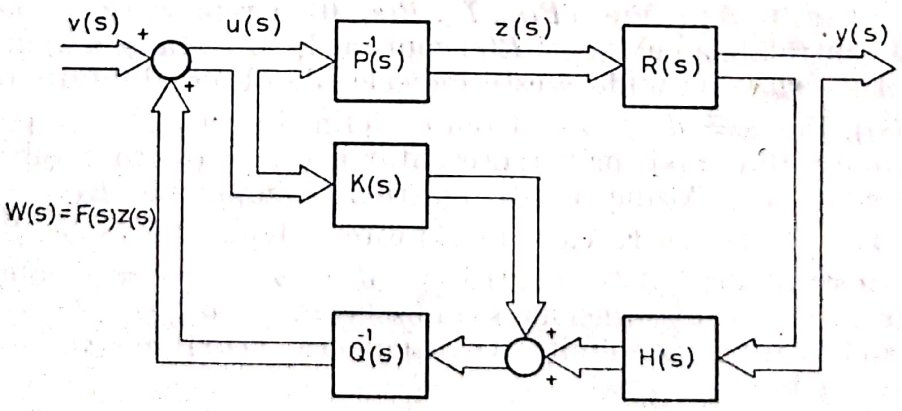


Fig. 3.4

Observația 3.4. Calculînd matricea de transfer de la $v(s)$ la $y(s)$ a sistemului din figura 3.4 (exercițiu pentru cititor) rezultă $y(s) = T_F\,(s)v(s)$, $T_F(s) = R(s)\,(P(s)-F(s))^{-1}$ care este identică cu matricea de transfer

Scanned with OKEN Scanner

de la $v(s)$ la $y(s)$ a sistemului din figura 3.1. Altfel spus, estimatorul nu se „vede" prin comandă la ieșire.

Exemplul 3.1. Se dă sistemul în reprezentarea polinomială standard controlabilă cu $m = p = 2$, prin

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s-1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ s & -1 \end{bmatrix}$$

$P(s)$ și $R(s)$ fiind coprime la dreapta (nu au zerouri comune), iar ordinul sistemului fiind $n = 3$. Se cere să se realizeze prin estimator de lege de lege de reacție o lege de comandă care să aloce polii corespunzători zerourilor polinomului $\chi(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$.

1. Calculul matricii de reacție $F(s)$

Pentru aceasta aplicăm procedura din corolarul 2.5. Avem atunci

$$\Gamma_c \triangleq \Gamma_c[P(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de unde

$$P_m(s) = \Gamma_c^{-1} P(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 1 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(s^{d_i}) - A_m S(s) \quad i = 1, 2,$$

$d_1 = 2$, $d_2 = 1$. Conform cu (2.83)

$$A_{mF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

de unde aplicînd (2.85) obținem

$$F(s) = \Gamma_c (A_{mF} - A_m) S(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-3s & -3 \\ -3s & -2 \end{bmatrix}$$

observîndu-se că $\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)]$ și verificîndu-se că $|P(s) - F(s)| = \chi(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Calculul estimatorului*

Calculăm mai întîi eliminantul lui $P(s)$ și $R(s)$. Cum $\nu \geqslant \frac{n}{p}$ începem testul de rang (maximal coloană) cu M_{e2}. Avem

$$M_{e2}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ sP(s) \\ R(s) \\ sR(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & s-1 \\ 1 & s+1 \\ s^3 & s^2-s \\ s & s^2+s \\ s & 1 \\ s & -1 \\ s^2 & s \\ s^2 & -s \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s & 0 \\ s^3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = M_{e2}\, S_e(s)$$

unde rang $M_{e2} = 7$ (maximal coloană) și deci $\nu = 2$. Pentru calculul unei inverse la stînga, fie H_e o matrice de selecție care selectează din M_{e2} primele 7 linii liniar independente.
Atunci $M_{e2}^S = (H_e M_{e2})\, H_e^{-1}$. Rezultă

$$M_{e2}^S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\nu = 2$, $\partial[|Q(s)|] = m(\nu-1) = 2$. Fie ales $|Q(s)| = 1+2s+s^2$. Avem $q_1 = q_2 = \nu-1 = 1$, iar $\tilde{q}_1 = 1$ și $\tilde{q}_2 = 2$. În consecință, $|Q(s)| = \pi_0(s) + s\,\pi_1(s) + s^2$ cu $\partial[\pi_0(s)]$, $\partial[\pi_1(s)] < 1$. Deci $\pi_0(s) = 1$, $\pi_1(s) = 2$ și conform cu (3,46), (3.49)

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

Atunci

$$Q(s)F(s) = \begin{bmatrix} -4s - 3s^2 & -2 - 3s \\ 1 - 3s - 3s^2 & -1 - 2s \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} = DS_{e2}(s)$$

de unde

$$[\underbrace{K_0}_{2} \vdots \underbrace{K_1}_{2} \vdots \underbrace{H_0}_{2} \underbrace{H_1}_{2}] = DM^S_{e2} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} -3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sau în definitiv

$$K(s) = K_0 + K_1 s = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = H_0 + H_1 s = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Atunci $K(s)$, $H(s)$ și $Q(s)$ definesc complet estimatorul de lege de reacție (pentru $F(s)$).

3.2. STABILIZAREA PRIN COMPENSARE

Un alt mod de stabilizare îl constituie compensarea (după ieșire). Fie în acest sens reprezentarea standard controlabilă (3.1), (3.2), *Problema compensării* constă în construirea sistemului $(Q(s), H(s), I_m, 0)$ adică

$$Q(s)\,w(s) = H(s)\,y(s). \qquad (3.53)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît, aplicînd legea de comandă

$$u(s) = w(s) + v(s) \tag{3.54}$$

unde $v(s) \in \mathbb{R}^m(s)$ este noua intrare, sistemul rezultat din (3.1), (3.2), (3.53) și (3.54) adică

$$P(s)\, z(s) - w(s) = v(s) \tag{3.55}$$

$$H(s)\, R(s)\, z(s) - Q(s)\, w(s) = 0 \tag{3.56}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) \tag{3.57}$$

să fie stabil (cu toți polii arbitrar alocați în $\mathbb{C}^-$), vezi figura 3.5, sistemul (3.53) (3.54), purtînd numele de *compensator* (după ieșire).

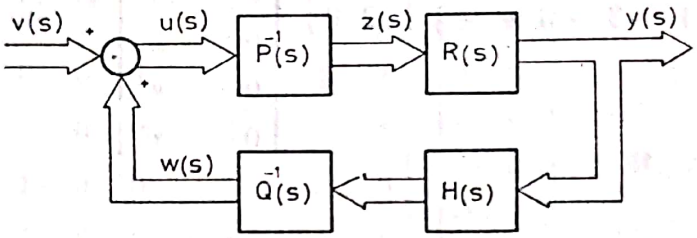


Fig. 3.5

Eliminînd $w(s)$ din (3.55) și (3.56) (sau din directa citire a figurii 3.5), rezultă

$$(Q(s)\, P(s) - H(s)\, R(s))\, z(s) = Q(s)\, v(s) \tag{3.58}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) \tag{3.59}$$

Așadar, problema compensării se reduce la determinarea $m \times m$ și $m \times p$ matricilor polinomiale $Q(s)$ și respectiv $H(s)$, astfel încît

(j) $Q^{-1}(s)\, H(s)$ să fie proprie ;

(jj) $|D(s)|$ să aibă zerourile plasate (arbitrar) în $\mathbb{C}^-$

unde

$$D(s) \triangleq Q(s)\, P(s) - H(s)\, R(s) \tag{3.60}$$

(evident, nesingulară).

Ecuația (3.60) este de tipul (3.41) cerîndu-se suplimentar satisfacerea condiției (j) care presupune implicit și nesingularitatea lui $Q(s)$.

Pentru satisfacerea acestei cerințe vom face pentru moment ipoteza

(J) $R(s)\, P^{-1}(s)$ este *strict proprie.*

Cu ipoteza (J) avem :

PROPOZIȚIA 3.1. Fie $(P(s),\ I_m,\ R(s),\ 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă cu $R(s)$ și $P(s)$ coprime la dreapta și $R(s)\, P^{-1}(s)$ strict proprie și fie ν indicele de observabilitate al perechii $(P(s),\ R(s))$.

Atunci ecuația (3.41) cu $D(s)$ coloană proprie satisfăcînd condiția de egalitate din (3.35) este satisfăcută cu $K(s)$ linie proprie și

$$\partial_{ri}[K(s)] = \nu - 1,\ i = 1, \ldots, m. \tag{3.61}$$

Demonstrație. Cu condițiile din propoziția 3.1 este clar că există $K(s)$ și $H(s)$ ($m \times m$ și $m \times p$) astfel încît (3.41) este satisfăcută (vezi lema 3.2). Fie $m \times m$ matricea diagonală $\Lambda(s) \triangleq \text{diag}\,(s^{\nu-1})$. Atunci (3.41) se poate scrie

$$\Lambda^{-1}(s)\,K(s) + \Lambda^{-1}(s)\,H(s)R(s)\,P^{-1}(s) = \Lambda^{-1}(s)\,D(s)\,P^{-1}(s) = \\ = D(s)\,(P(s)\,\Lambda(s))^{-1} \tag{3.62}$$

Se constată imediat că $\partial_{ci}\,[D(s)] = \partial_{ci}\,[P(s)\,\Lambda(s)]$, $i = 1, \ldots, m$ cu $P(s)\,\Lambda(s)$ coloană proprie. În consecință

$$\lim_{s\to\infty} D(s)\,(P(s)\,\Lambda(s))^{-1} = \Gamma_c[D(s)],\ (\Gamma_c\,|P(s)])^{-1} \triangleq \Gamma \tag{3.63}$$

Γ fiind evident nesingulară. De asemenea, $\Lambda^{-1}(s)H(s)$ este proprie (vezi propoziția 8 din anexa A2). Atunci trecînd la limită cu $s \to \infty$ în ambii membri ai lui (3.62) și ținînd cont de (3.42), (3.63) și ipoteza (J), rezultă

$$K_{\nu-1} = \Gamma \tag{3.64}$$

adică $K_{\nu-1}$ este nesingulară, ceea ce demonstrează propoziția.

Corolarul 3.3. În condițiile propoziției 3.1, $K^{-1}(s)\,H(s)$ este proprie. Aceasta rezultă imediat din faptul că $K(s)$ este linie proprie și din (3.61) și (3.43).

Se poate enunța acum :

Teorema 3.3. *Fie reprezentarea standard controlabilă* $(P(s), I_m, R(s), 0)$ *cu* $P(s)$ *și* $R(s)$ *coprime la dreapta,* $R(s)\,P^{-1}(s)$ *strict proprie și* $\pi(s)$ *un polinom de grad* $n+m$ $(\nu-1)$ *avînd zerourile arbitrar plasate în* $\mathbb{C}^-$, $(n = \partial[\,|P(s)|\,])$, ν *indicele de observabilitate al perechii* $(P(s), R(s))$. *Se poate atunci construi un compensator astfel încît polii sistemului rezultant să fie zerourile lui* $\pi(s)$.

Demonstrație. Fie ecuația (vezi (3.60))

$$Q(s)P(s) - H(s)R(s) = D(s) \tag{3.65}$$

unde $D(s) = \tilde{D}(s)$ cu $\tilde{D}(s)$ din (3.46) pentru care $q_i = d_i + \nu - 1$, $i = 1, \ldots, m$, iar polinoamele $\pi_i(s)$ rezultă din reprezentarea lui $\pi(s)$ în forma (3.47). Atunci, conform propoziției 3.1 și corolarului 3.3 există $Q(s)$ și $H(s)$ care satisfac condițiile (j) și (jj), unde $|\,D(s)\,| = \pi(s)$ (vezi observația 3.3).

Observația 3.5. Ordinul compensatorului este

$$n_c \triangleq \partial[\,|\,Q(a)\,|\,] = m(\nu - 1). \tag{3.66}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cele ce urmează, abordăm problema reducerii ordinului n_c al compensatorului.

Fie acum $(P(s),\ I_m,\ R(s),\ 0)$ o reprezentare polinomială standard controlabilă care este și observabilă, avînd matricea de transfer $T(s) = R(s)\,P^{-1}(s)$ strict proprie și comportarea intrare/ieșire.

$$y(s) = T(s)u(s). \tag{3.67}$$

Fie μ și ν indicii de controlabilitate și respectiv observabilitate ai perechii $(P(s),\ R(s))$ (evident μ și ν sînt unic determinați de $T(s)$). Fie legea de comandă (după ieșire)

$$u(s) = Hy(s) + v(s) \tag{3.68}$$

unde H este $m \times p$ constantă. Înlocuind (3.68) în (3.67) rezultă

$$(I_p + T(s)\,H)y(s) = T(s)v(s). \tag{3.69}$$

Întrucît $T(s)$ este strict proprie $I_p + T(s)H$ este proprie cu inversa, de asemenea, proprie (vezi corolarul 16 din anexa A2), rezultînd în consecință din (3.69)

$$y(s) = T_H(s)\,v(s) \tag{3.70}$$

cu

$$T_H(s) \triangleq (I_p + T(s)H)^{-1}\,T(s) \tag{3.71}$$

strict proprie. Fie acum două cazuri :

Cazul a.

$$v(s) = g\,\tilde{v}(s) \tag{3.72}$$

unde g este $m \times 1$ constantă, iar $\tilde{v}(s)$ este 1×1. Atunci (3.70) devine

$$y(s) = T_{H,g}(s)\,\tilde{v}(s) \tag{3.73}$$

cu

$$T_{H,g}(s) \triangleq T_H(s)\,g. \tag{3.74}$$

Fie

$$T_{H,g}(s) = \widetilde{R}(s)\,p^{-1}(s) \tag{3.75}$$

o factorizare primă la dreapta, unde $p(s)$ este un polinom monic, definind sistemul în reprezentarea standard controlabilă $(p(s),\ 1,\ \widetilde{R}(s),\ 0)$ care este și observabilă și avînd o singură intrare. Fie μ_a și ν_a indicii de controlabilitate, respectiv observabilitate ai perechii $(p(s),\ \widetilde{R}(s))$.

Cazul b.

$$\tilde{y}(s) = h^T y(s) \tag{3.76}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde h este $p \times 1$ constantă, iar $\tilde{y}(s)$ este 1×1. Atunci (3.70) devine

$$\tilde{y}(s) = T_{h,H}(s)\, v(s) \tag{3.77}$$

cu

$$T_{h,H}(s) \triangleq h^T\, T_H(s), \tag{3.78}$$

Fie

$$T_{h,H}(s) = m^{-1}(s)\, \tilde{Q}(s) \tag{3.79}$$

o factorizare primă la stînga unde $m(s)$ este un polinom monic, definind sistemul în reprezentarea standard observabilă $(m(s), \tilde{Q}(s), 1, 0)$ care este și controlabilă și avînd o singură ieșire. Fie μ_b și ν_b indicii de controlabilitate respectiv observabilitate ai perechii $(m(s), \tilde{Q}(s))$.

Cu elementele de mai sus avem

TEOREMA 3.4. *Există o pereche* (H, g) $((h^T, H))$ *astfel încît*

$$\partial[p(s)] = \partial[|P(s)|] \tag{3.80}$$

$$\nu_a = \nu \tag{3.81}$$

$$(\partial[m(s)] = \partial[|P(s)|]) \tag{3.82}$$

$$(\mu_b = \mu) \tag{3.83}$$

Mai mult, aproape pentru toate perechile (H, g) $((h^T, H))$ *(3.80), (3.81)* ((3.82), (3.83)) *sînt adevărate.*

Demonstrație. Fie (A, B, C) $(D = 0)$ un echivalent de stare al lui $(P(s), I_m, R(s), 0)$ care este evident controlabil și observabil, avînd indicii de controlabilitate respectiv observabilitate μ și ν. Din combinarea (3.68) cu (3.72) ((3.76)) rezultă legea de comandă $u = Hy + g\tilde{v}$ $(u = Hy + v, \tilde{y} = h^T y)$, rezultînd sistemul $(A+BHC, Bg, C)$ $((A+BHC, B, h^T C))$. Or, există (H, g) $((h^T, H))$ astfel încît sistemul $(A+BHC, Bg, C)$ să fie controlabil, rămînînd evident observabil $((A+BHC, B, h^T C)$ să fie observabil rămînînd evident controlabil). Mai mult, această proprietate este adevărată pentru aproape toate perechile (H, g) $((h^T, H))$. În consecință, $(A+BHC, Bg, C)$ este un echivalent de stare al lui $(p(s), 1, \tilde{R}(s), 0)$ $((A+BHC, B, h^T C)$ este un echivalent de stare al lui $(m(s), \tilde{Q}(s), 1, 0))$, constatare din care rezultă direct (3.80), (3.81) ((3.82), (3.83)).

Cele de mai sus sînt ilustrate în figurile 3.6, 3.7 și 3.8.

Avem astfel

TEOREMA 3.5. *Fie* $(P(s), I_m, R(s,), 0)$ *un sistem în reprezentarea polinomială standard controlabilă care este și observabil* $(P(s), R(s)$ *coprime la dreapta) cu* $R(s)P^{-1}(s)$ *strict proprie și fie* μ *și* ν *indicii de controlabilitate și respectiv observabilitate. Fie* $\pi(s)$ *un polinom de grad* $n+\nu-1$ $(n+\mu-1)$ *avînd zerourile arbitrar plasate în* $\mathbb{C}^-(n = \partial[|P(s)|])$. *Se poate atunci construi un compensator de ordin* $\nu-1$ $(\mu-1)$ *astfel încît polii sistemului rezultant să coincidă cu zerourile lui* $\pi(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

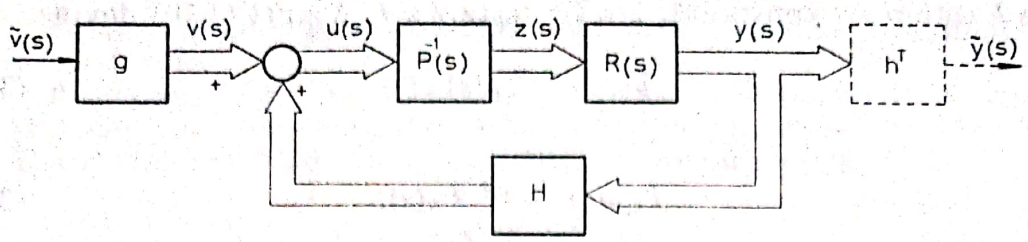


Fig. 3.6

Fig. 3.7

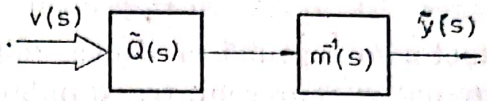


Fig. 3.8

Demonstratie. Cu ajutorul legii de comandă

$$u = Hy + g\tilde{v} \tag{3.84}$$

unde perechea (H, g) a fost aleasă conform teoremei 3.4, se reduce sistemul inițial prin (3.71), (3.75) la sistemul cu o singură intrare (vezi fig. 3.6, 3.7) $(p(s), 1, \tilde{R}(s), 0)$ cu $p(s)$, $\tilde{R}(s)$ coprime la dreapta și satisfăcînd (3.80) și (3.81). Pentru acest sistem, rezultă prin aplicarea procedurii din teorema 3.3, compensatorul

$$q(s)\, w(s) = \tilde{H}(s)\, y(s) \tag{3.85}$$

unde $q(s)$ și $\tilde{H}(s)$ se obțin prin rezolvarea ecuației

$$q(s)\, p(s) - \tilde{H}(s)\, \tilde{R}(s) = \pi(s) \tag{3.86}$$

și unde

$$\partial[q(s)] = \nu - 1. \tag{3.87}$$

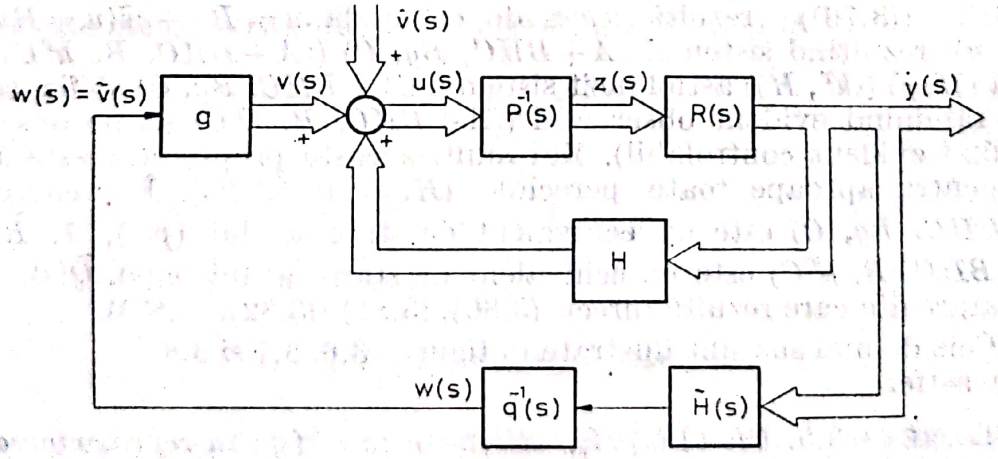


Fig. 3.9

Aplicînd acum legea de comandă

$$u(s) = gw(s) + \hat{v}(s), \quad \hat{v}(s) \in \mathbb{R}^m(s) \tag{3.88}$$

se obține compensarea dorită, vezi figura 3.9.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, (3.86), compensează, după cum rezultă din figura 3.9, sistemul din figura 3.7, unde $\partial[p(s)] = \partial[|P(s)|]$ (esențială această egalitate), ceea ce arată că $n + \nu - 1$ poli au fost alocați, adică polii sistemului original și încă $(\nu-1)$ poli. În mod analog, prin dualizare, se demonstrează teorema corespunzătoare enunțului din paranteze.

Observația 3.6. Pentru obținerea unei „minimizări" a gradului compensatorului se va aplica procedura descrisă în teorema 3.5, dacă

$$\nu = \min(\mu, \nu) \tag{3.89}$$

și procedura duală pentru

$$\mu = \min(\mu, \nu). \tag{3.90}$$

Trecem, acum, în final, la eliminarea ipotezei (J), adică vom presupune că $R(s)P^{-1}(s)$ este proprie. Pentru aceasta, scriem (3.2) în forma

$$y(s) = \hat{R}(s)\, z(s) + Du \tag{3.91}$$

unde D este cîtul lui $T(s) = R(s)\, P^{-1}(s)$. Se constată imediat că *dacă* $R(s)$ și $P(s)$ sînt coprime la dreapta $\hat{R}(s)$ și $P(s)$ continuă să fie coprime la dreapta (exercițiu pentru cititor). Definim atunci sistemul strict propriu

$$P(s)\, z(s) = u(s) \tag{3.92}$$

$$\hat{y}(s) = \hat{R}(s)\, z(s) \tag{3.93}$$

unde

$$\hat{y}(s) \triangleq y(s) - Du(s) \tag{3.94}$$

care reduce problema compensării în cadrul ipotezei (J).

Să observăm însă că în acest caz legea de comandă (3.68) scrisă

$$u(s) = H\hat{y}(s) + v(s)$$

este pentru sistemul original, ținînd cont de (3.94),

$$u(s) = Hy(s) - HDu(s) + v(s). \tag{3.95}$$

Faptul că $u(s)$ nu poate fi explicitat întotdeauna din (3.95) a condus la construirea teoriei compensării prin intermediul ipotezei (J) (la care, în final, se renunță).

Exemplul 3.2. Fie sistemul $(P(s), I_m, R(s), 0)$ cu $p = m = 2$ și unde

$$R(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

observîndu-se că $R(s)$, $P(s)$ sînt coprime la dreapta (întrucît nu au zerouri comune), $P(s)$ este coloană proprie ($\Gamma_c = I_2$), $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, deci $\mu = 2$ iar $R(s)\ P^{-1}(s)$ este strict proprie (deoarece $\partial_c[R(s)] < \partial_c[P(s)]$). Matricea de transfer este

$$T(s) = R(s)\ P^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{s-2}{s^2+s} \\ \dfrac{1}{s^2} & \dfrac{s^2-2}{s^3+s^2} \end{bmatrix}$$

care prin factorizare primă la stînga cu numitor linie proprie furnizează indicele de observabilitate $\nu = 2$ (cititorul verificînd aceasta). Întrucît (3.89) şi (3.90) sînt simultan îndeplinite, alegem procedura descrisă în demonstraţia teoremei 3.5. Alegem

$H = I_2$ şi $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Atunci

$$T_{H,g}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-2}{s^2+s} \\ \dfrac{s^2-2}{s^3+s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2-2s \\ \\ s^2-2 \end{bmatrix} (s^3+s^2)^{-1} = \tilde{R}(s)\ p^{-1}(s)$$

unde se vede că $\partial[p(s)] = \partial[|P(s)|] = 3$. Alegem acum un polinom $\pi(s)$ de grad $n + \nu - 1 = 4$

$$\pi(s) = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1,$$

avînd zerourile confundate în -1 şi rezolvăm ecuaţia

$$q(s)\,p(s) - \tilde{H}(s)\,\tilde{R}(s) = \pi(s)$$

Evident, indicele de observabilitate al perechii $(q(s), \tilde{R}(s))$ este, de asemenea, $\nu = 2$. În consecinţă, avem

$$\begin{bmatrix} q(s) \\ s\,q(s) \\ \hat{R}(s) \\ s\hat{R}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^3+s^2 \\ s^4+s^3 \\ s^2-2s \\ s^2-2 \\ s^3-2s^2 \\ s^2-2s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \\ s^4 \end{bmatrix} = M_{c2}\,S_{c2}(s)$$

iar

$$\pi(s) = [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1]\ S_{c2}(s) = DS_{c2}(s)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$[q \vdots -\tilde{H}] = DM_{c2}^{s} = [1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1] \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[-\frac{29}{6} \quad 1 \vdots \quad -2 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{11}{6} \quad 0 \right]$$

adică

$$q(s) = \frac{29}{6} + s, \quad \tilde{H}(s) = \left[2 + \frac{11}{6} s \vdots \frac{1}{2} \right]$$

după care se implementează schema din figura 3.9 (cu $H = 0$).

3.3. PROBLEMA REGLĂRII ŞI URMĂRIRII

Fie sistemul, în reprezentarea polinomială standard controlabilă $(P(s), I_m, R(s), 0)$, care este şi observabil, perturbat la intrare şi ieşire, adică

$$P(s)\, z(s) = u(s) + \omega_1(s) \tag{3.96}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) + \omega_2(s) \tag{3.97}$$

unde $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ sînt perturbaţiile .

Asupra perturbaţiilor se fac următoarele ipoteze :

a) nu sînt accesibile măsurării ;

b) este cunoscută clasa de funcţii la care aparţin ; mai exact, $\omega_1(t)$ şi $\omega_2(t)$ sînt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale $\pi_1\left(\frac{d}{dt}\right)\omega_1 = 0$, $\pi_2\left(\frac{d}{dt}\right)\omega = 0$ *arbitrar iniţializate*, unde $\pi_1(s)$ şi $\pi_2(s)$ *sînt polinoame cunoscute bine determinate.* Altfel spus

$$\omega_1(s) = \frac{\hat{\omega}_1(s)}{\pi_1(s)}, \quad \omega_2(s) = \frac{\hat{\omega}_2(s)}{\pi_2(s)} \tag{3.98}$$

unde $\hat{\omega}_1(s)$, $\hat{\omega}_2(s)$ sînt $m \times 1$ şi respectiv $p \times 1$ matrici polinomiale arbitrare şi necunoscute ;

Scanned with OKEN Scanner

c) perturbațiile sînt *persistente*, adică zerourile polinoamelor $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$ sînt în $\mathbb{C}^+$.

Fie acum $y_r(s) \in \mathbb{R}^p(s)$ *mărimea de referință* considerată ca aparținînd la clasa soluțiilor ecuației $\pi_r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) y_r = 0$, unde $\pi_r(s)$ este un *polinom bine determinat și cunoscut*, adică

$$y_r(s) = \frac{\hat{y}_r(s)}{\pi_r(s)} \tag{3.99}$$

unde $\hat{y}_r(s)$ este o $p \times 1$ matrice polinomială *arbitrară*, dar cunoscută. Fie introdusă mărimea

$$\varepsilon(s) = y_r(s) - y(s) \tag{3.100}$$

numită *eroare*.

Problema reglării (la perturbații) *și urmăririi* (referinței) constă în construirea unui sistem

$$P_r(s)\, z_r(s) = Q_r(s)\, \varepsilon(s) \tag{3.101}$$

$$u(s) = R_r(s)\, z_r(s) + W_r(s)\, \varepsilon(s) \tag{3.102}$$

numit *regulator*, astfel încît

R1. Sistemul rezultăt din (3.96), (3.97), (3.100), (3.101) și (3.102) să fie stabil (alocat).

R2. În prezența perturbațiilor și referinței, ca funcții aparținînd la clasele menționate mai sus, să avem :

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{3.103}$$

(vezi fig. 3.10). Fie introdus

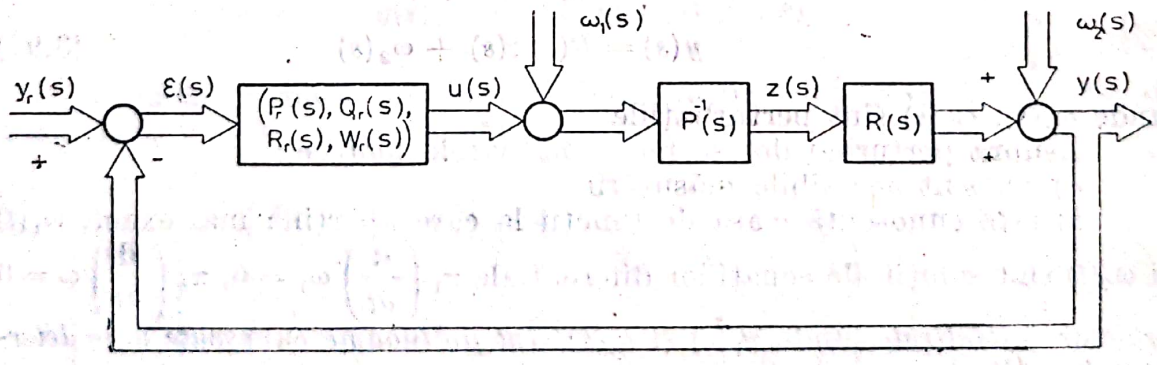


Fig. 3.10

$$\pi(s) = \text{c.m.m.m.c.}(\pi_1(s), \pi_2(s), \pi_r(s)) = \tag{3.104}$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{r-1}\, s^{r-1} + s^r$$

numit și *polinomul mărimilor exterioare* (exogene).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru soluționarea problemei propuse vom presupune că

$$\text{rang } R(s_i) = p, \; i = 1, \ldots, q \tag{3.105}$$

unde s_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ sînt rădăcinile distincte ale polinomului $\pi(s)$.

Introducem acum sistemul

$$\Pi(s)\, \zeta(s) = \varepsilon(s) \tag{3.106}$$

unde $\Pi(s)$ este $p \times p$ diagonală de forma

$$\Pi(s) \triangleq \text{diag}\,(\pi(s)) \tag{3.107}$$

iar $\varepsilon(s)$ este dat de (3.100). Cumulînd (3.96), (3.97), (3.100) și (3.107 obținem sistemul extins

$$P(s)\, z(s) = u(s) + \omega_1(s) \tag{3.108}$$

$$R(s)\, z(s) + \Pi(s)\, \zeta(s) = y_r(s) - \omega_2(s) \tag{3.109}$$

$$\varepsilon(s) = -R(s)\, z(s) + y_r(s) - \omega_2(s). \tag{3.110}$$

Ne propunem să stabilizăm, prin comanda $u(s)$, sistemul de mai sus, operație care, evident, se face în absența mărimilor exogene, adică pentru $y_r(s)$, $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$ nule. În aceste condiții sistemul are reprezentarea polinomială de stare parțială

$$\left(\begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ R(s) & \Pi(s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, [-R(s) \;\; 0], \; 0 \right) \tag{3.111}$$

Avem atunci

PROPOZIȚIA 3.2. Sistemul în reprezentarea polinomială de stare parțială (3.111) este controlabil.

Demonstrație. Fie

$$\Xi(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) & 0 & I_m \\ R(s) & \Pi(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

Atunci pentru orice $s \neq s_i$ (rădăcinile d istincte ale lui $\pi(s)$), $\Pi(s)$ este diagonală nesingulară și în consecință se vede din structura lui (3.112) că

$$\text{rang } \Xi\,(s) = m + p, \quad \forall s \neq s_i, \; i = 1, \ldots, q. \tag{3.113}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul cînd $s = s_i$, $\Pi(s_i) = 0$, dar datorită lui (3.105), avem în continuare

$$\text{rang } \Xi\ (s_i) = m+p,\ i = 1, \ldots, q. \tag{3.114}$$

Atunci din (3.113) și (3.114) rezultă

$$\text{rang } \Xi\ (s) = m+p,\ \forall s \tag{3.115}$$

ceea ce demonstrează propoziția.

Fie acum (A, B, C, D) echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării $(P(s), I_m, R(s), 0)$, adică

$$(sI_n - A)\, z(s) = Bu(s) \tag{3.116}$$

$$y(s) = C\, z(s) + Du(s) \tag{3.117}$$

unde

$$x(s) = S(s)\, z(s). \tag{3.118}$$

Fie $r \times r$ și $r \times 1$ matricele

$$M_0 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \ldots & -\alpha_{r-1} \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

precum și $pr \times pr$ și $pr \times p$ matricele

$$M \triangleq \begin{bmatrix} M_0 & & & \\ & M_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_0 \end{bmatrix}, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} N_0 & & & \\ & N_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_0 \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

Atunci ținînd cont de structura lui $\Pi(s)$, $(M, N, I_p, 0)$ este echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării $(\Pi(s), I_p, I_p, 0)$, adică (vezi (3.106))

$$(sI_{rp} - M)\, \xi(s) = N\varepsilon\ (s) \tag{3.121}$$

unde

$$\xi(s) = S_\pi(s)\, \zeta(s) \tag{3.122}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu

$$S_\pi(s) \triangleq \begin{bmatrix} \begin{matrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{r-1}\end{matrix} & & \\ & \begin{matrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{r-1}\end{matrix} & \cdots \\ & & \begin{matrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{r-1}\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

Atunci din (3.116), (3.117), (3.121) și (3.100) cu $y_r(s) = 0$, rezultă

$$\begin{bmatrix} sI_n - A & 0 \\ NC & sI_{rp} - M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ \xi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ -ND \end{bmatrix} u(s) \tag{3.124}$$

$$\varepsilon(s) = [-C \quad 0] \begin{bmatrix} x(s) \\ \xi(s) \end{bmatrix} - Du(s) \tag{3.125}$$

În consecință sistemul

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -NC & M \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ -ND \end{bmatrix}, [-C \quad 0], D \right) \tag{3.126}$$

este un echivalent de stare al lui (3.111). Conform propoziției 3.2 (3.126) este controlabil. Există atunci o lege de comandă (după stare),

$$u(s) = F_1 x(s) + F_2 \xi(s) + v(s) \tag{3.127}$$

care stabilizează (3.124), (3.125) prin alocarea polilor sistemului rezultant în $\mathbb{C}^-$. Ținînd cont de (3.118) și (3.122) rezultă că

$$u(s) = F_1(s) z(s) + F_2(s) \zeta(s) + v(s) \tag{3.128}$$

cu

$$F_1(s) \triangleq F_1 S(s) \tag{3.129}$$

și

$$F_2(s) \triangleq F_2 S_\pi(s) \tag{3.130}$$

stabilizează sistemul (3.111).

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuim acum (3.128), cu $v(s) = 0$, în (3.108) care devine

$$(P(s) - F_1(s))\, z(s) - F_2(s)\, \zeta(s) = \omega_1(s) \tag{3.131}$$

şi care împreună cu (3.109) şi (3.110) conduce la sistemul rezultant în circuit închis a cărei matrice polinomială asociată, este

$$\Pi_0(s) = \left[\begin{array}{cc:ccc} \overset{z}{} & \overset{\zeta}{} & \overset{y_r}{} & \overset{\omega_1}{} & \overset{\omega_2}{} \\ P(s) - F_1(s) & -F_2(s) & 0 & -I_m & 0 \\ R(s) & \Pi(s) & -I_p & 0 & I_p \\ \hdashline -R(s) & 0 & I_p & 0 & -I_p \end{array}\right] \tag{3.132}$$

şi unde

$$\Delta(s) \triangleq \left|\begin{array}{cc} P(s) - F_1(s) & -F_2(s) \\ R(s) & \Pi(s) \end{array}\right| \tag{3.133}$$

are zerourile alocate în $\mathbb{C}^-$ prin legea de comandă (3.128).

Calculăm acum matricea de transfer asociată matricii polinomiale $\Pi_0(s)$ din (3.132). Adunînd a doua bloc-linie la a treia bloc-linie în $\Pi_0(s)$ se obţine matricea strict echivalentă,

$$\tilde{\Pi}_0(s) = \left[\begin{array}{cc:ccc} P(s) - F_1(s) & -F_2(s) & 0 & -I_m & 0 \\ R(s) & \Pi(s) & -I_p & 0 & I_p \\ \hdashline 0 & \Pi(s) & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.134}$$

de unde aplicînd regula cunoscută de citire a matricii de transfer dintr-o matrice polinomială asociată unui sistem (vezi observaţia 2.3) rezultă direct din (3.134)

$$T_0(s) = [0 \;\; \Pi(s)] \begin{bmatrix} P(s) - F_1(s) & -F_2(s) \\ R(s) & \Pi(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ -I_p & 0 & I_p \end{bmatrix} = \tag{3.135}$$

$$= [0 \quad I_p] \begin{bmatrix} P(s) - F_1(s) & -F_2(s) \\ R(s) & \Pi(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ -I_p & 0 & I_p \end{bmatrix} \pi(s)$$

care descrie transferul

$$\varepsilon(s) = T_0(s) \begin{bmatrix} y_r(s) \\ \omega_1(s) \\ \omega_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.136}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că $T_0(s)$ se poate pune sub forma

$$T_0(s) = \frac{G_0(s)}{\Delta(s)} \pi(s) \tag{3.137}$$

unde $G_0(s)$ este o matrice polinomială adecvată, iar $\Delta(s)$ a fost definit prin (3.133).

Înlocuind acum în (3.136) $y_r(s)$, $\omega_1(s)$ și $\omega_2(s)$ cu expresiile corespunzătoare din (3.98) și (3.99) și ținînd cont de (3.137) rezultă

$$\varepsilon(s) = \frac{G_0(s)}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \hat{\pi}_r(s)\ \hat{y}_r(s) \\ \hat{\pi}_1(s)\ \hat{\omega}_1(s) \\ \hat{\pi}_2(s)\ \hat{\omega}_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.138}$$

unde $\hat{\pi}_r(s)$, $\hat{\pi}_1(s)$ și $\hat{\pi}_2(s)$ sînt respectiv cîturile dintre $\pi(s)$ și $\pi_r(s)$, $\pi_1(s)$, $\pi_2(s)$ (vezi (3.104)).

Din (3.138) se vede că $s\,\varepsilon\,(s)$ este olomorfă în $\mathbb{C}^+$, zerourile lui $\Delta(s)$ fiind în $\mathbb{C}^-$, iar s este nesimplificabil din același motiv. În consecință, se poate aplica teorema valorii finale, rezultînd

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon\,(s) = 0. \tag{3.139}$$

Așadar, *există o lege de comandă după stare, care stabilizează sistemul* (3.108), (3.109), (3.110) *și pentru care, în prezența referinței și a perturbațiilor din clasele precizate, are loc egalitatea* (3.139).

Cu aceste elemente avem :

TEOREMA 3.6. *Fie un sistem, în reprezentarea polinomială standard controlabilă, care este și observabil, perturbat asupra comenzii și ieșirii conform ecuațiilor (3.96), (3.97). Perturbațiile și referința aparțin claselor de funcții descrise de (3.98) și (3.99). Atunci, dacă este îndeplinită condiția (3.105) se poate construi un regulator (3.101), (3.102) pentru sistemul considerat, adică sistemul rezultant să satisfacă cerințele R1 și R2.*

Demonstrație. Față de dezvoltarea de mai sus este evident că construcția regulatorului revine la implementarea legii de comandă stabilizantre (3.128) cu $v(s) = 0$, pentru sistemul extins (3.108), (3.109) și (3.110) Întrucît din (3.130), $F_2(s)\,\Pi^{-1}(s)$ este proprie, implementarea lui (3.118) se reduce la construcția unui estimator de $F_1(s)\,z(s)$,

$$Q(s)\,w(s) = K(s)\,u(s) + H(s)\,y(s) \tag{3.140}$$

sau

$$Q(s)\,w(s) = K(s)\,u(s) - H(s)\,\varepsilon(s) \tag{3.141}$$

unde $Q(s)$, $K(s)$ și $H(s)$ se determină astfel încît (vezi paragraful 3.1)

$$K(s)P(s) + H(s)R(s) = Q(s)F_1(s) \tag{3.142}$$

cu $|Q(s)|$ avînd zerourile alocate arbitrar în $\mathbb{C}^-$.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd cont de ecuațiile (3.96), (3.97) și (3.100), (3.140) sau (3.141) devin

$$Q(s)\,w(s) = Q(s)F_1(s)\,z(s) - K(s)\,\omega_1(s) + H(s)\omega_2(s) \tag{3.143}$$

sau respectiv

$$Q(s)\,w(s) = Q(s)F_1(s)\,z(s) - K(s)\,\omega_1(s) + H(s)\,(\omega_2(s) - y_r(s)). \tag{3.144}$$

Atunci legea de comandă (3.128) se înlocuiește cu

$$u(s) = w(s) + F_2(s)\,\zeta(s) \tag{3.145}$$

unde $w(s)$ este furnizat de (3.140) sau (3.141), respectiv explicit de (3.143) sau (3.144). Cu aceste precizări (3.131) (provenită din (3.108)) se modifică în

$$P(s)\,z(s) - F_2(s)\,\zeta(s) - w(s) = \omega_1(s)] \tag{3.146}$$

sistemul rezultant în circuit închis fiind descris în definitiv de (3.146), (3.109), (3.143) sau (3.144) și (3.110), avînd matricea polinomială asociată

$$\Pi_{w0}(s) = \left[\begin{array}{cccccc} z & \zeta & w & y_r & \omega_1 & \omega_2 \\ P(s) & -F_2(s) & -I_m & 0 & -I_m & 0 \\ R(s) & (s) & 0 & -I_p & 0 & I_p \\ Q(s)\,F_1(s) & 0 & -Q(s) & -H(s) & -K(s) & H(s) \\ \hdashline -R(s) & 0 & 0 & I_p & 0 & -I_p \end{array}\right] \tag{3.147}$$

scrisă pentru varianta (3.143). Or, $\Pi_{0w}(s)$ este strict echivalentă cu (exercițiu pentru cititor)

$$\Pi_{0w}(s) = \left[\begin{array}{ccccccc} P(s) - F_1(s) & -F_2(s) & -I_m & 0 & -I_m & 0 \\ R(s) & \Pi(s) & 0 & -I_p & 0 & I_p \\ \hdashline 0 & 0 & -Q(s) & -H(s) & -K(s) & H(s) \\ \hdashline 0 & \Pi(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.148}$$

unde partițiile marcate evidențiază stabilizarea sistemului rezultant închis în sensul că $\Delta(s)$ din (3.133) devine

$$\Delta_w(s) = \Delta(s)\,|\,Q(s)\,| \tag{3.149}$$

care este un polinom hurwitzian. Inspectînd acum (3.148) se constată imediat că matricea de transfer asociată, $T_{0w}(s)$, este de același tip cu (3.137) adică

$$T_{0w}(s) = \frac{G_{0w}(s)}{\Delta_w(s)}\,\pi(s) \tag{3.150}$$

din care rezultă, similar ca mai sus, validitatea lui (3.139).

Scanned with OKEN Scanner

Analog se face raţionamentul pentru varianta (3.144). Teorema este astfel complet demonstrată.

Structura sistemului rezultant este dată în figura 3.11. unde cu linie punctată este ilustrată varianta (3.141) sau explicit (3.144), intrarea în blocul $H(s)$ de la $y(s)$ înlocuindu-se cu $\varepsilon(s)$.

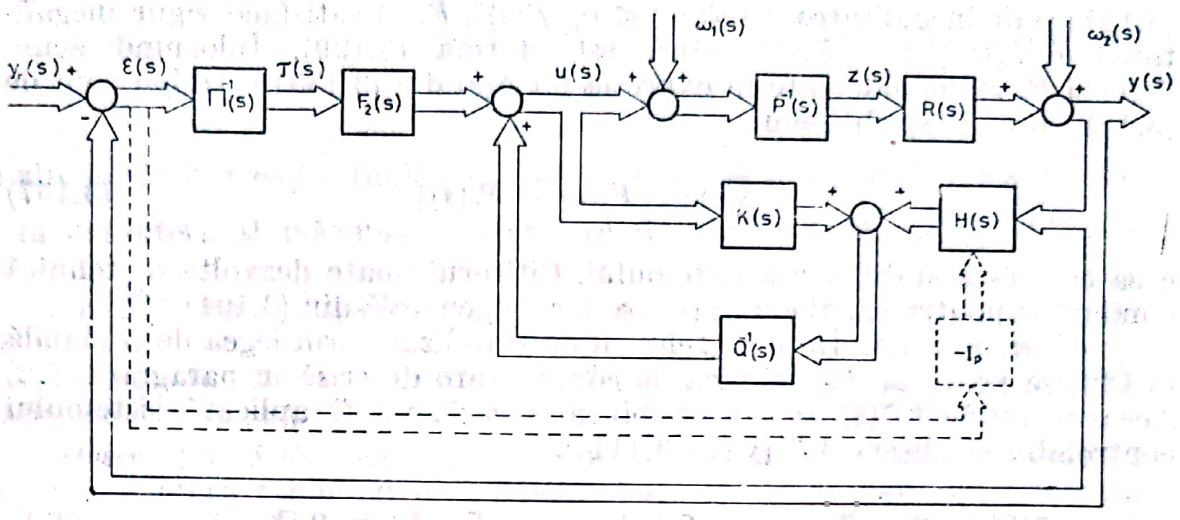


Fig. 3.11

Se impun acum cîteva observaţii.

Observaţia 3.7. Dacă $\pi(s) = s$ şi $m = p$ determinarea coeficienţilor de reacţie $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ se face direct fără a apela la tehnica de alocare asupra echivalentului (3.126). Într-adevăr, observînd pentru început că în acest caz din (3.130) rezultă $F_2(s) = F_2$ matrice constantă, fie

$$P_0(s) \triangleq sP(s) \tag{3.151}$$

care este coloană proprie şi fie determinată $F_0(s)$ cu

$$\partial_c[F_0(s)] < \partial_c[P_0(s)] \tag{3.152}$$

astfel încît $|P_0(s) - F_0(s)|$ să aibă zerourile alocate în $\mathbb{C}^-$ (vezi teorema 3.1.). Fie acum ecuaţia

$$sF_1(s) - F_2R(s) = F_0(s) \tag{3.153}$$

cu $F_1(s), F_2$ necunoscute. Atunci din (3.153) avem

$$F_1(s) = \frac{F_2R(s) + F_0(s)}{s} \tag{3.154}$$

şi cum $F_1(s)$ este polinomială trebuie ca s să dividă $F_2R(s) + F_0(s)$ adică trebuie să avem :

$$F_2R(0) + F_0(0) = 0. \tag{3.155}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum (3.105) se reduce în acest caz la nesingularitatea lui $R(0)$ avem din (3.155)

$$F_2 = -F_0(0)\,R^{-1}(0) \tag{3.156}$$

de unde înlocuind (3.156) în (3.154) rezultă $F_1(s)$, unde ţinînd cont de (3.151) şi de inegalitatea $\partial_c[R(s)] \leqslant \partial_c[P(s)]$, $F_1(s)$ satisface sigur inegalitatea $\partial_c[F_1(s)] < \partial_c[P(s)]$ adică este forma (3.129). Înlocuind acum $F_1(s)$ şi F_2 astfel calculate în expresia lui $\Delta(s)$ din (3.133) şi ţinînd cont de (3.151) şi (3.153) obţinem

$$\Delta(s) = |\,P_0(s) - F_0(s)\,| \tag{3.157}$$

ceea ce atestă stabilizarea sistemului. Cititorul poate dezvolta o tehnică similară şi pentru cazul cînd $\pi(s)$ are forma generală din (3.104).

Observaţia 3.8. În locul tehnicii de stabilizare prin legea de comandă (3.128) se poate aplica tehnica de compensare descrisă în paragraful 3.2. Aceasta, întrucît $\zeta(s)$ este accesibil măsurării, va fi aplicată sistemului controlabil şi observabil (vezi (3.111)),

$$\tilde{P}(s) = \begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ R(s) & \Pi(s) \end{bmatrix},\ \tilde{Q}(s) = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{R}(s) = \begin{bmatrix} -R(s) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},\ \tilde{W}(s) = 0 \tag{3.158}$$

prin factorizarea lui

$$\tilde{T}(s) = \tilde{R}(s)\,\tilde{P}^{-1}(s)\,\tilde{Q}(s) \tag{3.159}$$

în

$$\tilde{T}(s) = \tilde{\tilde{R}}(s)\,\tilde{\tilde{P}}^{-1}(s) \tag{3.160}$$

cu $\tilde{\tilde{P}}(s)$, $\tilde{\tilde{R}}(s)$ coprime la dreapta şi $\tilde{\tilde{P}}(s)$ coloană proprie.

Observaţia 3.9. Faptul că $\varepsilon(t) \to 0$ cu $t \to \infty$ se datoreşte în fond următoarele două caracteristici ale sistemului rezultant închis (vezi (3.137), (3.150)):

1) prezenţa lui $\pi(s)$ la numărătorul matricii de transfer, ceea ce asigură eliminarea numitorilor $\pi_r(s)$, $\pi_1(s)$ şi $\pi_2(s)$ ai mărimilor externe (exogene) sistemului şi face ca $s\varepsilon(s)$ să aibă ca numitor numai $\Delta(s)$ sau $\Delta_w(s)$.

2) $\Delta(0), \Delta_w(0) \neq 0$, ceea ce asigură ca

$$\lim_{s \to 0} s\varepsilon(s) = 0 \tag{3.161}$$

împreună cu olomorfia lui $s\varepsilon(s)$ în $\mathbb{C}^+$, ceea ce conduce în definitiv la valabilitatea teoremei valorii finale adică

$$\lim_{s \to 0} s\varepsilon(s) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{3.162}$$

de unde din (3.161) şi (3.162) rezultă satisfacerea cerinţei R2 (şi implicit a lui R1).

Scanned with OKEN Scanner

Introducerea lui $\pi(s)$ la numărătorul matricii de transfer este efectul introducerii sistemului (3.106) care este o copie a modelului mărimilor exogene (introdusă pe fiecare canal de eroare). Din acest motiv (3.106) se mai numește și *model intern* (al mărimilor exogene). De exemplu, în cazul particular din observația 3.7 (3.106) se scrie

$$\zeta(s) = \frac{1}{s}\,\varepsilon(s) \tag{3.163}$$

cu alte cuvinte, treapta (unitară) a fost introdusă în interiorul sistemului ca model intern al mărimilor exterioare de tip treaptă, adică $\frac{dy_r}{dt} = 0$, $\frac{d\omega_1}{dt} = 0$, $\frac{d\omega_2}{dt} = 0$, arbitrar inițializate. Aceasta este, în fond, o interpretare structurală a introducerii elementului integral I în buclele clasice de reglare (capabil să rejecteze perturbațiile de tip treaptă).

Observația 3.10. Dacă parametrii procesului variază, parametrii modelului intern rămînînd însă neschimbați, în limite care nu alterează stabilitatea sistemului rezultant închis, formele matricilor de transfer (3.133), (3.146) sînt aceleași, cu zerourile lui $\Delta(s)$, $\Delta_w(s)$ în $\mathbb{C}^-$, și în consecință proprietatea R2 se conservă, adică $\varepsilon(t) \to 0$ cu $t \to \infty$. Această capabilitate a sistemului rezultant închis poartă numele de *robustețe*.

Modificarea însă a coeficienților polinomului $\pi(s)$, chiar în limite „strînse" alterează proprietatea R2. Într-adevăr, în acest caz, nu mai are loc eliminarea numitorilor lui $y_r(s)$, $\omega_1(s)$ și $\omega_2(s)$. Dacă totuși acest „defect" conduce la apariția numai a polilor simpli pe axa imaginară în funcția $s\,\varepsilon\,(s)$, aceasta implică, așa cum este cunoscut din teoria transformatei Laplace, comportarea mărginită a lui $\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}\varepsilon(s)$, adică $|\,\varepsilon(t)\,| < M$, $M < +\infty$ cu M funcție continuă de modificarea coeficienților lui $\pi(s)$. De exemplu, dacă $\pi(s) = s^r$, nu poate avea loc nici o alterare a coeficienților acestuia. Dacă $\pi(s) = s^2 + \omega_n^2$ poate apare o alterare de tipul $\pi(s) \to \hat{\pi}(s) = s^2 + \hat{\omega}_n^2$, în care caz se vede că $\mathcal{L}^{-1}\,\pi(s)/\hat{\pi}(s) = \alpha(\omega_n^2 - \hat{\omega}_n^2)\sin(\hat{\omega}_n t + \varphi)$, adică $M = \alpha(\omega_n^2 - \hat{\omega}_n^2)$ apărînd o eroare armonică, a cărei amplitudine depinde continuu de gradul de alterare $\omega_n^2 \to \hat{\omega}_n^2$. Dacă însă $\pi(s) = s - a$ (cu $a > 0$) atunci o alterare de tipul $\pi(s) \to \hat{\pi}(s) = s - \hat{a}$ (cu $\hat{a} > 0$) conduce la apariția unei derive nestabilizate $\mathcal{L}^{-1}\,\pi(s)/\hat{\pi}(s) = \alpha(a - \hat{a})\,e^{\hat{a}t}$. Rezultă din discuția de mai sus că pentru cazul în care *clasa mărimilor exogene este de tip polinomial* $(c_0 + c_1 t + \ldots + c_{r-1}t^{r-1})$ *adică* $\pi(s) = s^r$ *sau de tip armonic* $(C\sin(\omega_n t + \varphi))$, *adică* $\pi(s) = s^2 + \omega_n^2$, *alterările lui* $\pi(s)$ *provoacă o alterare a proprietății* R1 *numai pînă la mărginirea în timp a erorii.*

Exemplul 3.3. Fie sistemul din exemplul 3.1, perturbat de perturbații armonice de pulsație $\sqrt{2}$ și avînd o referință armonică de pulsație 1. Se cere sinteza regulatorului.

Observăm că $\pi(s) = (s^2 + 1)(s^2 + 2) = s^4 + 3s^2 + 2$ avînd rădăcinile $s_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $s_{3,4} = \pm i$. Întrucît $R(s_i)$ cu $i = 1,2,3,4$ este nesingulară, este posibilă construcția regulatorului.

Scanned with OKEN Scanner

Din exemplul 3.1 rezultă imediat echivalentul de stare

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

De asemenea,

$$\Pi(s)=\begin{bmatrix}s^4+3s^2+2 & 0\\ 0 & s^4+3s^2+2\end{bmatrix}$$

de unde

$$M=\left[\begin{array}{cccc:cccc}0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ -2 & 0 & -3 & 0 & & & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 & 0 & 0\\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0\\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1\\ & & & & -2 & 0 & -3 & 0\end{array}\right],\quad N=\left[\begin{array}{c:c}0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 1 & \\ \hdashline & 0\\ & 0\\ & 0\\ & 1\end{array}\right]$$

cu aceste elemente avem

$$A_0=\begin{bmatrix}A & 0\\ -NC & M\end{bmatrix},\quad B_0=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}$$

pereche care se stabilizează prin tehnica de alocare cunoscută (exercițiu pentru cititor) rezultînd

$$F_0=[\underbrace{F_1}_{3}\ \underbrace{F_2}_{8}]$$

de unde

$$F_1(s)=F_1S(s),\qquad F_2(s)=F_2(s)=F_2\ S_\pi(s)$$

cu

$$S(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad S_\pi(s)=\begin{bmatrix}1 & \\ \vdots & \\ s^3 & 1\\ & \vdots\\ & s^3\end{bmatrix}$$

Se calculează un estimator de $F_1(s)$ cu ajutorul eliminantului din exemplul 3.1, adoptîndu-se structurile din figura 3.11.

Exemplul 3.4. Aceeași problemă pentru $R(s)=1$ și $P(s)=s+1$ pentru referință și perturbații treaptă, adică $\pi(s)=s$.

Scanned with OKEN Scanner

Problema are soluție deoarece $R(0) \neq 0$. Atunci $\Pi(s) = s$, iar $P_0(s) = sP(s) = s^2 + s$, căruia i se alocă polii -1 și -2, rezultînd direct $F_0(s) = -2s-2$. Atunci conform cu (3.156)

$$F_2 = -F_0(0)\, R^{-1}(0) = 2$$

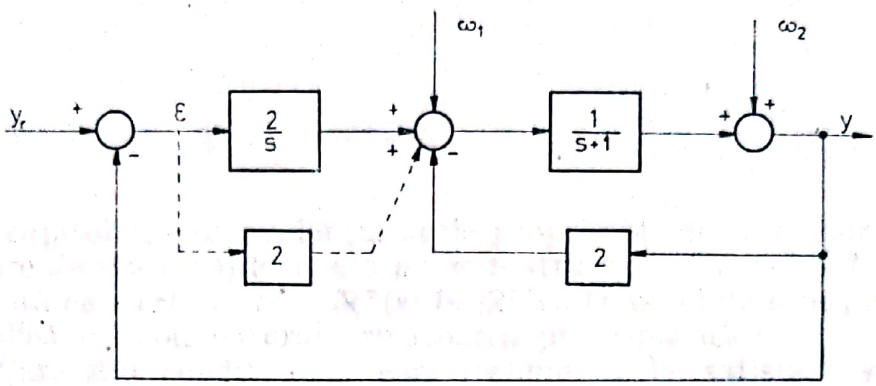


Fig. 3.12

iar din (3.154)

$$F_1(s) = \frac{F_0(s) + F_2 R(s)}{s} = -2$$

Rezultă atunci schema din figura 3.12.

Bibliografie

3.1. Chi-Tsong Chen, Ching-Hwang Hsu, *Design of dynamic compensation for multivariable systems*. Proc. JACC Conf. Paper *8—E1*, Aug (1971).
3.2. S. P. Bhattacharyya, *Compensator design based on the invariance principle*. IEEE Trans AC-20, *5*, Oct. (1975).
3.3. W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems*. Springer Verlag, New York, 1975.
3.4. V. Ionescu, *Control law design for arbitrary pole allocation*. Rev. Roum. de sci. tech. serie electr. energ., *1*, tome **21** (1976).
3.5. H. Kimura, *Geometric structure of observers for linear feedback control laws*. IEEE Trans. AC—22, *5*, Oct. (1977).
3.6. V. Ionescu, *On the design of low order observers*. Rev. Roum. de sci. tech. serie electr. energ. *3*, **20** (1975).
3.7. E. J. Davison, H. W. Smith, *Pole assignment in linear time-invariant multivariable systems with constant disturbances*. Automatica, **7**, 489—498 (1971).
3.8. E. J. Davison, *The output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances*. IEEE Trans-AC-17, *5*, Oct. (1972).
3.9. E. J. Davison, *The systematic design of control systems for large multivariable linear time-invariant systems*. Automatica, **9**, 441—452 (1973).
3.10. E. J. Davison, *A generalization of the output control of linear time-invariant multivariable systems with unmeasurable arbitrary disturbances*. IEEE Trans. AC—20, *6*, Dec. (1975).
3.11. E. J. Davison, A. Goldenberg, *Robust control of a general servomechanism problem: the servocompensator*. Automatica, **11**, 461—471 (1975).
3.12. E. J. Davison, *The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems*. IEEE Trans. *AC—21*, **1**, Feb. (1976).
3.13. E. J. Davison, *Multivariable tuning regulators: The feedforward and robust control of a general servomechanism problem*. IEEE Trans. AC-21, *1*, Feb. (1976).
3.14. V. Ionescu, *On the tracking and regulation problem*. Rev. Roum. sci. tech. serie electr. energ. *4*, **21**(1976).
3.15. W. A. Wolovich, *Multivariable system synthesis with step disturbances rejection*. IEEE Trans. AC-19, **2**, April (1974).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 4

Inversarea sistemelor liniare

În acest capitol se vor evidenția acele proprietăți de structură ale unui sistem care derivă nemjilocit din $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$ a acestuia, privită ca *morfism de la* $\mathbb{R}^m(s)$ *în* $\mathbb{R}^p(s)$. O astfel de interpretare a lui $T(s)$ implică în mod natural următoarea problematică :

1. Care sînt condițiile pe care trebuie să le satisfacă $y(s) \in \mathbb{R}^p(s)$ astfel încît $y(s) \in \text{Im } T(s)$ și în consecință să se caracterizeze imaginea în $\mathbb{R}^p(s)$ a lui $T(s)$.

2. Dacă $y(s) \in \text{Im } T(s)$, adică $y(s)$ este o ieșire a lui $T(s)$, care este clasa intrărilor $u(s)$ pentru care $y(s) = T(s)\,u(s)$.

Întrucît $0 \in \text{Im } T(s)$, o problemă esențială derivată din chestiunea 2, este :

2*a*. Care este clasa intrărilor $u(s)$ pentru care $T(s)\,u(s) = 0$ adică care *nulează* ieșirea lui $T(s)$, și în consecință să se caracterizeze Ker $T(s)$, nucleul lui $T(s)$ în $\mathbb{R}^m(s)$.

Soluționarea chestiunilor de principiu de mai sus va avea, așa cum se va vedea mai departe, o serie de consecințe procedurale în rezolvarea unor probleme de sinteză structurală cum sînt sinteza exactă, decuplarea etc.

4.1. CARACTERIZAREA IMAGINII. REPRODUCTORUL

Fie $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$. Pentru construcția unei baze a lui Im $T(s)$ (vezi corolarul 17 din anexa A2) se procedează astfel :

Se consideră o factorizare oarecare la dreapta a lui $T(s)$

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s) \tag{4.1}$$

unde evident, deoarece $T(s)$ este proprie*), avem $\partial_c[R(s)] \leqslant \partial_c[P(s)]$.

Fie $U_1(s)$ o $m \times m$ matrice unimodulară care aduce $R(s)$ la forma de eșalon redus pe coloane, adică

$$[\underbrace{R_a(s)}_{r} \quad 0] = R(s)\,U_1(s) \stackrel{\Delta}{=} R(s)[\underbrace{U_a(s)}_{r}\ \overline{U}_1(s)] \tag{4.2}$$

unde $R_a(s) = R(s)U_a(s)$ este de rang maximal coloană. Atunci numărul r de coloane ale lui $R_a(s)$ este egal cu *rangul lui* $T(s)$,

$$\rho[T(s)] = \rho[R(s)] = r \leqslant \min(p, m) \tag{4.3}$$

iar coloanele lui $R_a(s)$ formează o *bază* pentru Im $T(s)$.

*) Dezvoltările din acest paragraf nu sînt condiționate expres de faptul că $T(s)$ este proprie.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $L(s)$ o $p \times p$ matrice unimodulară care aduce $R_a(s)$ la forma de eşalon redus pe linii adică,

$$r\left\{\begin{bmatrix} X_a(s) \\ 0 \end{bmatrix}\right. = L(s)\, R_a(s) \triangleq \begin{bmatrix} L_a(s) \\ L_b(s) \end{bmatrix}\Big\} r \atop R_a(s) \tag{4.4}$$

unde $X_a(s) = L_a(s)R_a(s)$ este $r \times r$ nesingulară, rezultînd în forma superior triunghiulară la dreapta

Din procedura de mai sus rezultă imediat :

TEOREMA 4.1. *(teorema domeniului). $y(s) \in$ Im $T(s)$ dacă şi numai dacă*

$$L_b(s)\, y(s) = 0 \tag{4.5}$$

adică $y(s) \in$ Ker $L_0(s)$

Demonstraţie. Întrucît din (4.4) avem

$$L_b(s)\, R_a(s) = 0 \tag{4.6}$$

şi $\rho[R_a(s)] + \rho[L_b(s)] = r + (n - r) = n$, rezultă că Im $T(s) =$ Ker $L_b(s)$.

Observaţia 4.1. Întrucît din (4.6) rezultă că, coloanele lui $L_b^T(s)$ formează o bază pentru Ker $R_a^T(s)$, testul (4.5), de apartenenţă a lui $y(s)$ la Im $T(s)$, se poate face cu orice matrice polinomială $\hat{L}_b(s)$ pentru care coloanele lui $\hat{L}_b^T(s)$ formează o bază pentru Ker $R_a^T(s)$. Mai mult, întrucît $L_b(s)$ este primă la stînga (vezi corolarul 8 din anexa A 2), deci coloanele lui $L_b^T(s)$ formează o bază minimală pentru Ker $R_a^T(s)$, (vezi definiţia 25 din anexa A 2), orice matrice $\hat{L}_b(s)$ de tipul celei de mai sus este de forma $\hat{L}_b(s) = \hat{D}(s)L_b(s)$ unde $\hat{D}(s)$ este $r \times r$ polinomială şi nesingulară (vezi corolarul 19 din anexa A2).

Se dă astfel un răspuns complet la problema 1.

Fie acum $y(s) \in$ Im $T(s)$. Soluţionarea problemei 2 revine la rezolvarea ecuaţiei

$$R(s)\, z(s) = y(s) \tag{4.7}$$

unde

$$z(s) \triangleq P^{-1}(s)\, u(s). \tag{4.8}$$

În acest scop se selectează în mod arbitrar din $R(s)$, r linii liniar independente. Aceasta se realizează imediat prin inspectarea lui $R_a(s)$ care are forma particulară de eşalon redus pe coloane şi care permite construcţia directă a $p \times p$ matricii de permutare

$$H = \begin{bmatrix} H_a \\ H_b \end{bmatrix}\Big\} r \tag{4.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $H_a\ R_a(s)$ este formată din primele r linii liniar independente din $R_a(s)$ dispuse în aceeaşi succesiune relativă; clar că $H_aR_a(s)$ este $r\times r$ nesingulară şi inferior triunghiulară la stînga. Rezultă atunci din (4.2) că $H_aR(s)$ este formată din *primele* r linii liniar independente din $R(s)$, dispuse în aceeaşi ordine relativă. În consecinţă restul de linii $H_bR(s)$ a lui $R(s)$ sînt o combinaţie liniară (raţională) de liniile lui $H_aR(s)$ adică :

$$H_bR(s) = \Lambda(s)H_aR(s) \tag{4.10}$$

unde (exerciţiu pentru cititor) $\Lambda(s)$ rezultă din

$$\Lambda(s) = H_bR_a(s)\ (H_aR_a(s))^{-1}. \tag{4.11}$$

Fie

$$\Lambda(s) = \Lambda_{bb}^{-1}(s)\ \Lambda_{ba}(s) \tag{4.12}$$

o factorizare primă la stînga a lui $\Lambda(s)$. Introducînd matricea polinomială :

$$\hat{L}_b(s) \triangleq [\Lambda_{ba}(s)\ H_a + \Lambda_{bb}(s)\ H_b] \tag{4.13}$$

rezultă din (4.10) şi (4.12) că :

$$\hat{L}_b(s)\ R_a(s) = 0. \tag{4.14}$$

Mai mult, întrucît factorizarea (4.12) este prima la stînga, rezultă (vezi corolarul 7 din teorema 6 din anexa A2) că $\hat{L}_b(s)$ definită prin (4.13), este primă la stînga şi în consecinţă conform observaţiei 4.1 este unimodular echivalentă la stînga cu $L_b(s)$. Aşadar, conform aceleiaşi observaţii $y(s) \in \text{Im}\ T(s)$ dacă şi numai dacă

$$\hat{L}_b(s)\ y(s) = 0 \tag{4.15}$$

Construim acum $p\times p$ matricea *nesingulară*

$$\hat{L}(s) \triangleq \begin{bmatrix} H_a \\ \hat{L}_b(s) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Înmulţind la stînga ambii membri ai ecuaţiei (4.7) cu $\hat{L}(s)$ se obţine ţinînd cont de (4.14) şi (4.15)

$$H_aR(s)z(s) = H_ay(s) \tag{4.17}$$

Completăm acum matricea $H_aR(s)$ pînă la o $m\times m$ matrice polinomială nesingulară

$$\hat{R}(s) = \begin{bmatrix} H_aR(s) \\ \bar{R}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix} \tag{4.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde se vede imediat că orice $\bar{R}(s)$ este de forma

$$\bar{R}(s) = [\bar{R}_a(s)\ \bar{\bar{R}}(s)]U_1^{-1}(s) \tag{4.19}$$

cu $\bar{\bar{R}}(s)$ $(m-r)\times(m-r)$ nesingulară.
Atunci (4.17) se mai poate scrie

$$G_a^T\hat{R}(s)\,z(s) = H_a y(s) \tag{4.20}$$

unde

$$G_a \triangleq \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix} \tag{4.21}$$

Introducînd și matricea

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{bmatrix}\} r \tag{4.22}$$

ale cărei coloane formează o bază în $\mathbb{R}^m(s)$ pentru Ker G_a^T, soluția generală a lui (4.20) și deci a lu (4.7) ($\hat{L}(s)$ nesingulară) este

$$z(s) = \hat{R}^{-1}(s)[G_aH_ay(s) + \bar{G}\bar{v}(s)] \tag{4.23}$$

pentru orice $\bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$. Avem atunci răspunsul la problema 2 exprimat prin :

TEOREMA 4.2. *(teorema de reprezentare). Dacă $y(s) \in$ Im $T(s)$ adică $y(s)$, este o ieșire a lui $T(s)$, atunci clasa soluțiilor ecuației :*

$$T(s)\,u(s) = y(s) \tag{4.24}$$

adică clasa intrărilor $u(s)$ care cauzează ieșirea $y(s)$, este

$$u(s) = P(s)\,\hat{R}^{-1}(s)\,(G_aH_a\,y(s) + \bar{G}\bar{v}(s)) \tag{4.25}$$

pentru toți $\bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$

Demonstrația este o consecință banală a relațiilor (4.1) (4.8) și (4.22)
Definim acum :

$$T_R(s) \triangleq P(s)\hat{R}^{-1}(s)\,[G_aH_a \,\vdots\, \bar{G}] \tag{4.26}$$

Atunci din (4.25), clasa soluțiilor lui (4.24) cu $y(s) \in$ Im $T(s)$, rezultă ca fiind

$$u(s) = T_R(s)\begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{v}(s) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

pentru toți $\bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$

Scanned with OKEN Scanner

Observația 4.2. Din procedura dezvoltată mai sus rezultă că clasa soluțiilor ecuației (4.24) este independentă de modul de construcție a lui (4.26) în ceea ce privește factorizarea (4.1), selecția $H_a R(s)$ și completarea $\bar{R}(s)$ în (4.18) (cu $\hat{R}(s)$ nesingulară). Așadar orice matrice rațională $T_R(s)$ construită prin (4.26), definește prin (4.27), aceiași clasă a soluțiilor lui (4.24)

Față de observația de mai sus introducem

DEFINIȚIA 4.1. Fie $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$*). Orice matrice rațională $T_R(s)$ definită prin (4.26) se numește reproductor (funcțional) al lui $T(s)$.

Denumirea de reproductor este justificată de faptul că pentru orice $y(s) \in \operatorname{Im} T(s)$ și $\bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$

$$y(s) = T(s)\, T_R(s) \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{v}(s) \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

după cum rezultă imediat din (4.24) și (4.27), adică $T(s)T_R(s)$ „reproduce" $\operatorname{Im} T(s)$.

Observația 4.3. Analog ecuației (4.25) se poate considera ecuația duală

$$u^{*T}(s)\, T^*(s) = y^{*T}(s) \tag{4.29}$$

unde $T^*(s)$ este $p \times m$ de rang r^*.

Rezolvarea se face transpunînd ecuația (4.29), reducînd-o astfel la ecuația (4.24) și apoi retranspunînd rezultatul. Atunci, pentru $y^{*T}(s)$ situat în subspațiul generat de liniile lui $T^*(s)$, se obține

$$u^{*T}(s) = [y^{*T}(s) \vdots \bar{v}^{*T}(s)]\, T_R^*(s) \tag{4.30}$$

pentru orice $1 \times (p - r^*)$ matrice rațională $\bar{v}^{*T}(s)$ și unde

$$T_R^*(s) \triangleq \left[\frac{H_a^* G_a^*}{\bar{G}^*}\right] \hat{R}^{*-1}(s) P^*(s) \tag{4.31}$$

în care $T^*(s) = P^{*-1}(s)\, R^*(s)$ este o factorizare oarecare la stînga a lui $T^*(s)$, $R^*(s)H_a^*$ este formată din r^* coloane liniar independente ale lui $R^*(s)$, $G_a^* \triangleq [I_{r^*} \vdots \underbrace{0}_{p-r^*}]$, $\bar{G}^* \triangleq [\underbrace{0}_{r^*} \vdots I_{p-r^*}]$ iar $\hat{R}^*(s) \triangleq [R^*(s)\, H_a \vdots \bar{R}^*(s)]$ $p \times p$ nesingulară. Vom spune că (4.31) definește un reproductor dual al lui $T^*(s)$.

Cu notațiile din (4.2) introducem

$$P(s)\, U_1(s) = P(s)[U_a(s) \quad \bar{U}_1(s)] \triangleq [P_a(s) \quad \bar{P}_1(s)]. \tag{4.32}$$

Ținînd cont de (4.2), (4.18), (4.19), (4.21), (4.22) și (4.32), (4.26) se explicitează în forma

$$T_R(s) = [(P_a(s) - \bar{P}_1(s)\, \bar{R}^{-1}(s)\, \bar{R}_a(s))(H_a R_a(s))^{-1} H_a \vdots \bar{P}_1(s)\, \bar{R}^{-1}(s)]. \tag{4.33}$$

*) $T(s)$ poate fi în fond orice matrice rațională

Dacă se consideră completarea (4.19) particularizată prin $\bar{R}_a(s) = 0$, $\bar{\bar{R}}(s) = I_{m-r}$, (4.33) devine

$$T_{Re}(s) \stackrel{\Delta}{=} [P_a(s)\,(H_a R_a(s))^{-1} H_a \,\vdots\, \bar{P}_1(s)] \tag{4.34}$$

care poartă numele de *reproductor elementar* şi care *este construit în exclusivitate din elementele factorizării* (4.1)

Un calcul imediat explicitează (4.33) prin (4.34) în forma

$$T_R(s) = T_{Re}(s) \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ -\bar{\bar{R}}^{-1}(s)\bar{R}_a(s)\,(H_a R_a(s))^{-1} H_a & \bar{\bar{R}}^{-1}(s) \end{array}\right] \tag{4.35}$$

Expresia (4.35) arată modul cum se generează din reproductorul elementar (4.34) clasa reproductorilor (4.26) în funcţie de completările de tipul (4.19) pentru o factorizare (4.1) şi o selecţie $H_a R(s)$ *date.*

Înlocuind (4.35) în (4.27) se obţine

$$u(s) = T_{Re}(s) \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{v}_1(s) \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

unde :

$$\bar{v}_1(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\bar{R}}^{-1}(s)\,(\bar{v}(s) - \bar{R}_a(s)\,(H_a R_a(s))^{-1} H_a y(s)). \tag{4.37}$$

Atunci conform observaţiei (4.2), pentru un $y(s) \in \mathrm{Im}\ T(s)$ şi toţi $\bar{v}_1(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$, (4.36) reprezintă clasa soluţiilor ecuaţiei (4.24), regăsirea unei soluţii date de (4.27) prin (4.36) făcîndu-se cu relaţia (4.37) şi reciproc, întrucît $\bar{\bar{R}}(s)$ este nesingulară.

Consideraţiile de mai sus sînt susceptibile de reprezentarea din figura 4.1.

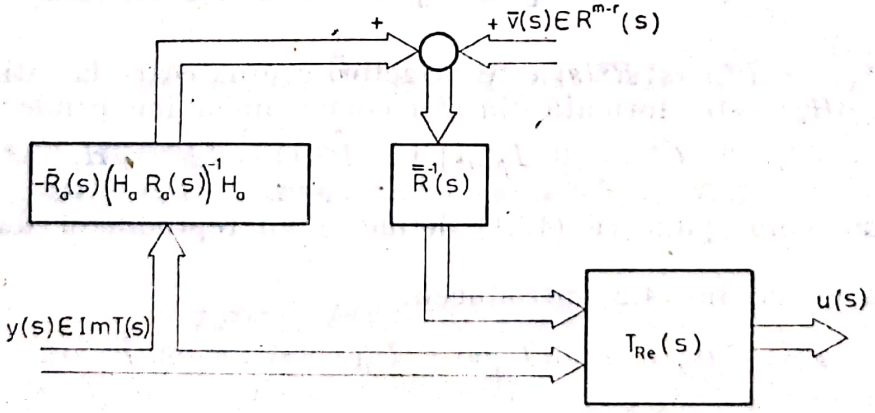


Fig. 4.1

în care se ilustrează atît modul de generare al clasei soluţiilor ecuaţiei (4.24) pentru un $y(s) \in \mathrm{Im}\ T(s)$ (deci ieşire a lui $T(s)$) cît şi modul de generare al clasei reproductorilor (4.26) din reproductorul elementar, faţă de completările (4.19), pentru o factorizare (4.1) şi o selecţie $H_a R(s)$ date.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum *clasa* $\mathcal{T}_R$ a *reproductorilor* (4.26) *parametrizată față de toate factorizările* (4.1), *selecțiile* $H_a R(s)$ și *completările* $\bar{R}(s)$. O întrebare firească care se pune constă în a vedea *ce păstrează invariant din* $T(s)$ *această clasă.*

În acest sens să restrîngem pentru început clasa $\mathcal{T}_R$ numai la factorizările (4.1) care sînt *prime*. Fie această restringere notată cu $\tilde{\mathcal{T}}_R$. Din inspectarea unui reproductor (4.26) rezultă imediat că *mulțimea* P_{T_R} *a polilor acestuia este formată din zerourile nesimplificabile ale lui* $\hat{R}(s)$ *cu* $P(s)$. Astfel dacă $D(s)$ este un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $\hat{R}(s)$ și $P(s)$, adică se poate scrie

$$\hat{R}(s) = \hat{R}_1(s)\, D(s) \tag{4.38}$$

$$P(s) = P_1(s)\, D(s), \tag{4.39}$$

atunci P_{T_R} este mulțimea zerourilor lui $\hat{R}_1(s)$. Dacă notăm cu $Z_{\hat{R}}$ mulțimea zerourilor lui $\hat{R}(s)$ și cu Z_D mulțimea zerourilor lui $D(s)$ avem din (4.38) relația evidentă

$$Z_{\hat{R}} = P_{T_R} \cup Z_D \tag{4.40}$$

Atunci pentru clasa $\tilde{\mathcal{T}}_R$ se poate scrie :

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_{\hat{R}} = \bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} (P_{T_R} \cup Z_D) \tag{4.41}$$

Întrucît factorizările (4.1) au fost presupuse prime, rezultă (vezi teorema 5 din anexa A 2) că $(p+m) \times m$ matricile de tipul

$$RP(s) \triangleq \begin{bmatrix} R(s) \\ P(s) \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

nu au zerouri. Aceasta înseamnă că *intersecția mulțimilor de zerouri ale tuturor* $m \times m$ *submatricilor nesingulare ale unei matrici* $RP(s)$ *este vidă.* O astfel de $m \times m$ submatrice nesingulară a lui $RP(s)$ trebuie să conțină cel mult r linii liniar independente din $R(s)$ restul fiind linii liniar independente din $P(s)$. Ținînd cont că orice matrice $\hat{R}(s)$ conține sigur r linii liniar independente din $R(s)$, rezultă din (4.38) și (4.39) că orice $m \times m$ submatrice nesingulară din $RP(s)$ are un divizor la dreapta de tipul $D(s)$ și în consecință

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_D = \emptyset. \tag{4.43}$$

Atunci, cu (4.43), (4.41) devine

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_{\hat{R}} = \bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} P_{T_R}. \tag{4.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm acum cu Z_a zerourile lui $H_a R(s)$. Atunci evident din (4.18) rezultă că

$$Z_{\hat{R}} \supset Z_a \tag{4.45}$$

şi deci

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_{\hat{R}} \supset \bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_a. \tag{4.46}$$

Cum însă membrul drept al incluziunii (4.46) reprezintă zerourile comune ale acelor matrici $\hat{R}(s)$ cu care se construiesc reproductorii elementari, deci o subclasă a lui $\tilde{\mathcal{T}}_R$, (4.46) devine

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_{\hat{R}} = \bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_a \tag{4.47}$$

Cu (4.47), (4.44) devine

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} P_{T_R} = \bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} Z_a. \tag{4.48}$$

Membrul drept al egalităţii (4.48) reprezintă însă zerourile comune tuturor $r \times p$ submatricilor de linii liniar independente din $R(s)$, adică zerourile oricărui $R(s)$ din factorizarea (4.1) presupusă primă, adică zerourile lui $T(s)$, notate Z_T. În consecinţă (4.48) devine

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} P_{T_R} = Z_T. \tag{4.49}$$

Extinzînd acum $\tilde{\mathcal{T}}_R$ la întreaga clasă $\mathcal{T}_R$, adică luînd în considerare şi factorizările (4.1) care nu sînt prime, egalitatea (4.49) continuă să fie adevărată deoarece

$$\bigcap_{T_R \in \tilde{\mathcal{T}}_R} P_{T_R} = \bigcap_{T_R \in \mathcal{T}_R} P_{T_R} \tag{4.50}$$

(lăsăm demonstraţia lui (4.50) pe seama cititorului) şi în consecinţă (4.49) devine în final

$$\bigcap_{T_R \in \mathcal{T}_R} P_{T_R} = Z_T \tag{4.51}$$

DEFINIŢIA 4.2. Mulţimea definită de membrul stîng al egalităţii (4.51) formează polii invarianţi ai inversării imaginii lui $T(s)$.

Avem imediat din (4.51)

TEOREMA 4.3. *Polii invarianţi ai inversării imaginii unei matrici de transfer sînt zerourile acelei matrici.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum reproductorul (4.26) scris în forma :

$$T_R(s) = [\,T^{\#}(s) \,\vdots\, N(s)\,] \tag{4.52}$$

unde

$$T^{\#}(s) \triangleq P(s)\hat{R}^{-1}(s)G_aH_a \tag{4.53}$$

şi

$$N(s) \triangleq P(s)\hat{R}^{-1}(s)\bar{G} \tag{4.54}$$

şi unde (4.53) şi (4.54) se pot detalia imediat din (4.33).
Un calcul simplu arată că (4.53) satisface relaţiile

$$T(s)\,T^{\#}(s)\,T(s) = T(s) \quad \text{şi} \quad T^{\#}(s)\,T(s)\,T^{\#}(s) = T^{\#}(s) \tag{4.55}$$

adică $T^{\#}(s)$ defineşte o *pseudoinversă**) a lui $T(s)$.

Pseudoinversa (4.53) se particularizează în funcţie de rangul r al lui $T(s)$ astfel.

Cazul A. $r = p$. În acest caz $\operatorname{Im} T(s) = \mathbb{R}^p(s)$, ecuaţia (4.24) avînd totdeauna o soluţie, iar (4.53) devine

$$T^D(s) \triangleq P(s)\,\hat{R}^{-1}(s)\,G_a \tag{4.56}$$

Se constată imediat că

$$T(s)\,T^D(s) = I_p \tag{4.57}$$

adică $T(s)$ este *inversabilă la dreapta* iar (4.56) defineşte o *inversă la dreapta* a lui $T(s)$.

Considerînd $T(s)$ inversabilă la dreapta, *clasa inverselor la dreapta ale lui* $T(s)$ *este dată de clasa soluţiilor ecuaţiei* (4.57). Atunci din (4.34) şi (4.36) rezultă clasa soluţiilor ecuaţiei (4.57) ca fiind

$$T^D(s) = [\,P_a(s)R_a^{-1}(s) \,\vdots\, \bar{P}_1(s)\,]\begin{bmatrix} I_p \\ \bar{V}(s) \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

pentru toate $(m-p)\times p$ matricile raţionale $\bar{V}(s)$. Exprimînd $\bar{V}(s)$ printr-o factorizare (primă) la stînga $\bar{V}(s) = \bar{V}_0^{-1}(s)\bar{V}_w(s)$, (4.58) se mai scrie :

$$T^D(s) = [\,P_a(s)\;\; \bar{P}_1(s)\,]\begin{bmatrix} R_a(s) & 0 \\ 0 & \bar{V}_0(s) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I_p \\ \bar{V}_w(s) \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

Considerăm factorizarea (4.1) *primă*. Atunci rezultă că primele două matrici din factorizarea (4.59) sînt coprime la dreapta. Se calculează un c.m.m.d.c.

---

*) Orice matrice raţională $T^{\#}(s)$ care satisface (4.55) se numeşte pseudoinversă a lui $T(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

la stînga $D_S(s)$ al ultimelor două matrici din factorizarea (4.59) (vezi procedura expusă în teorema 4 din anexa A 2). Aceasta este de forma (exerciţiu pentru cititor).

$$D_S(s) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ \bar{V}_w(s) & \bar{D}_S(s) \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

unde $\bar{D}_S(s)$ este un c.m.m.d.c. la stînga a lui $\bar{V}_v(s)$ şi $\bar{V}_w(s)R_a(s)$. Eliminînd (4.60) din (4.59), se obţine

$$T^D(s) = [P_a(s)\ \bar{P}_1(s)] \begin{bmatrix} R_a(s) & 0 \\ \bar{V}_{w1}(s) & \bar{V}_{v1}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

unde $\bar{V}_{w1}(s) = -\bar{D}_S^{-1}(s)\,\bar{V}_w(s)\,R_a(s)$ şi $\bar{V}_{v1}(s) = \bar{D}_S^{-1}(s)\,\bar{V}_v(s)$. În urma operaţiilor de mai sus rezultă că polii lui $T^D(s)$ sînt daţi de zerourile determinantului

$$\begin{vmatrix} R_a(s) & 0 \\ \bar{V}_{w1}(s) & \bar{V}_{v1}(s) \end{vmatrix} = |R_a(s)|\,|\bar{V}_{v1}(s)| \tag{4.62}$$

iar ordinul minimal de realizare (vezi definiţia 21 din anexa A2) al lui $T^D(s)$ este

$$\nu(T^D(s)) = \partial\,[|R_a(s)|] + \partial\,[|\bar{V}_{v1}(s)|]. \tag{4.63}$$

Avem atunci :

TEOREMA 4.4. *Dacă $T(s)$ este inversabilă la dreapta atunci polii oricărei inverse la dreapta $T^D(s)$ a lui $T(s)$ (vezi clasa (4.58)) conţin zerourile lui $T(s)$. Există o inversă la dreapta ai cărei poli sînt exclusiv zerourile lui $T(s)$ şi care este o inversă de ordin de realizare minim, obţinută din (4.58) pentru factorizarea (4.1) primă şi $\bar{V}(s) = 0$.*

Demonstraţie. În urma dezvoltărilor de mai sus rezultă că polii oricărei inverse la dreapta a lui $T(s)$ sînt zerourile polinomului (4.62) din care se vede că *fixe* sînt zerourile lui $|R_a(s)|$ care coincid cu zerourile lui $T(s)$ (vezi procedura de calcul a zerourilor din anexa A2). Din (4.63) se vede că pentru orice inversă la dreapta avem $\nu(T^D(s)) \geqslant \partial\,[|R_a(s)|]$, iar dacă în (4.58) se face $\bar{V}(s) = 0$, inegalitate anterioară devine egalitate şi teorema este complet demonstrată.

Introducem acum

DEFINIŢIA 4.3. Fie un sistem avînd $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$. Sistemul se numeşte funcţional controlabil (la ieşire) dacă pentru orice $y(s) \in \mathbb{R}^p(s)$ există o intrare $u(s) \in \mathbb{R}^m(s)$ astfel încît $T(s)u(s) = y(s)$.

Rezultă atunci imediat că *un sistem este funcţional controlabil* (la ieşire) *dacă şi numai dacă matricea sa de transfer este inversabilă la dreapta.*

Cazul B. $r = m$. În acest caz $\operatorname{Ker} T(s) = \{0\}$, rezultînd că pentru $y(s) \in \operatorname{Im} T(s)$, *ecuaţia* (4.24) *are o soluţie unică*, iar (4.53) devine

$$T^S(s) \triangleq P(s)\,(H_a R(s))^{-1} H_a. \tag{4.64}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică imediat că:

$$T^s(s)\,T(s) = I_m \tag{4.65}$$

adică $T(s)$ este *inversabilă la stînga*, (4.64) definind o *inversă la stînga* pentru $T(s)$.

Considerînd $T(s)$ inversabilă la stînga, *clasa inverselor la stînga ale lui $T(s)$ este dată de clasa soluțiilor ecuației* (4.65). Dată fiind forma ecuației (4.65) este comod să ne referim la ecuația duală (4.29) adică la reproductorul dual (4.31). Atunci folosind dualul lui (4.34), clasa soluțiilor lui (4.65) rezultă ca fiind:

$$T^s(s) = [I_m \vdots \bar{V}^*(s)] \begin{bmatrix} R_a^{*-1}(s)\,P_a^*(s) \\ \hdashline \bar{P}_1^*(s) \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

pentru toate $m \times (p-m)$ matricile raționale $\bar{V}^*(s)$, unde $R_a^*(s)$ și $P_a^*(s)$, $\bar{P}_1^*(s)$ se definesc prin relații duale lui (4.2) și respectiv (4.32). Aplicînd lui (4.66) un raționament similar cu cel aplicat lui (4.58), rezultă

TEOREMA 4.5. *Dacă $T(s)$ este inversabilă la stînga atunci polii oricărei inverse la stînga $T^s(s)$ a lui $T(s)$ (vezi clasa (4.66)) conțin zerourile lui $T(s)$. Există o inversă la stînga ai cărei poli sînt exclusiv zerourile lui $T(s)$ și care este o inversă de ordin de realizare minim, obținută din (4.66) pentru orice factorizare primă la stînga a lui $T(s)$ și $\bar{V}^*(s) = 0$.*

Introducem acum

DEFINIȚIA 4.4. Fie un sistem cu $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$. Sistemul se numește funcțional observabil (la intrare) dacă pentru orice ieșire $y(s)$ a lui $T(s)$ există o singură intrare $u(s)$ care o cauzează, adică există $u(s)$ unic astfel încît $T(s)\,u(s) = y(s)$.

Rezultă atunci imediat că *un sistem este funcțional observabil* (la intrare) *dacă și numai dacă matricea sa de transfer este inversabilă la stînga.*

Cazul C. $r = p = m$. În acest caz rezultă imediat că $T(s)$ este inversabilă ($R(s)$ în (4.1) inversabilă), adică:

$$T^D(s) = T^S(s) =$$

$$= T^{-1}(s)\,(= R^{-1}(s)\,P(s)). \tag{4.67}$$

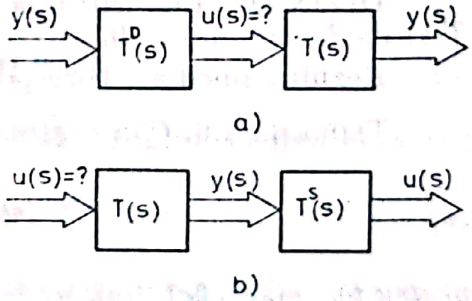


Fig. 4.2

Considerațiile de mai sus privind inversabilitatea la dreapta adică controlabilitatea funcțională și respectiv inversabilitatea la stînga adică observabilitatea funcțională sînt susceptibile de reprezentările din figura 4.2, *a*) și respectiv *b*).

Observația 4.4. Referitor la noțiunile introduse prin definițiile 4.3 și 4.4. se constată că spre deosebire de noțiunile de controlabilitate și observabilitate, controlabilitatea și observabilitatea funcțională sînt expres legate de matricea de transfer $T(s)$ și nu de o realizare a acesteia, adică sînt *noțiuni proprii matricii de transfer* și nu sistemului.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 4.5. O caracterizare a pseudoinverselor $T^{\#}(s)$ ale lui $T(s)$ în sensul teoremelor 4.4 și 4.5 este dificilă, dificultatea constînd în explicitarea clasei soluțiilor ecuațiilor (4.55).

Totuși se poate construi o pseudoinversă a lui $T(s)$ care să aibă polii egali cu zerourile lui $T(s)$. În acest scop fie

$$T(s) = U(s)\begin{bmatrix}\Lambda_0(s) & \\ & 0\end{bmatrix}V(s) \tag{4.68}$$

unde $U(s)$ și $V(s)$ sînt matrici unimodulare astfel încît $U^{-1}(s)\,T(s)\,V^{-1}(s)$ este forma McMillan a $p\times m$ matricii $T(s)$ (vezi anexa A2). Atunci $m\times p$ matricea rațională

$$T^{\#}(s) = V^{-1}(s)\begin{bmatrix}\Lambda_0(s) & \\ & 0\end{bmatrix}U^{-1}(s) \tag{4.69}$$

este o pseudoinversă a lui $T(s)$ ai cărei poli coincid cu zerourile lui $T(s)$ (lăsăm demonstrația pe seama cititorului).

4.2. CARACTERIZAREA NUCLEULUI. NULORUL

În acest paragraf vom da un răspuns la problema 2*a* formulată la începutul capitolului. Introducem

DEFINIȚIA 4.5. Fie $p\times m$ matricea de transfer $T(s)$ ($\rho[T(s)] = r$). Vom numi nulor al lui $T(s)$ orice matrice rațională ale cărei coloane formează o bază pentru $\mathrm{Ker}\,T(s)$.

Se constată imediat că $m\times(m-r)$ *matricea* $N(s)$ *definită prin* (4.54) *este un nulor al lui* $T(s)$

Introducem și

DEFINIȚIA 4.6. Intrarea $u(s)\in\mathbb{R}^m(s)$ se spune că nulează ieșirea lui $T(s)$ dacă $T(s)u(s) = 0$.

Rezultă imediat, corespondentul teoremei 4.2. care este

TEOREMA 4.6. *Clasa intrărilor care nulează ieșirea lui* $T(s)$ *este*

$$u(s) = N(s)\,\bar{v}(s) \tag{4.70}$$

pentru toți $\bar{v}(s)\in\mathbb{R}^{m-r}(s)$, *unde* $N(s)$ *este un nulor oarecare al lui* $T(s)$

Demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului.

Din expresia (4.34) a reproductorului elementar și din (4.32) se vede că

$$\bar{P}_1(s) = P(s)\,\bar{U}_1(s) \tag{4.71}$$

este un nulor *polinomial*, unde matricea $\bar{U}_1(s)$ este primă la dreapta, coloanele acesteia formînd o bază minimală pentru Ker $R(s)$ (vezi observația

Scanned with OKEN Scanner

10 din anexa A2). Fie $V(s)$ o $(m-r) \times (m-r)$ matrice unimodulară astfel încît :

$$\bar{P}(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{P}_1(s)\, V(s) \tag{4.72}$$

este coloană proprie, coloanele lui $\bar{P}(s)$ formînd o bază redusă (vezi definiţia 24 din anexa A 2) pentru Ker $T(s)$. Punînd $\bar{U}(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{U}_1(s)\, V(s)$, (4.72) se scrie în funcţie de (4.71)

$$\bar{P}(s) = P(s)\, \bar{U}(s) \tag{4.73}$$

unde $\bar{U}(s)$ continuă să fie primă la dreapta coloanele acesteia formînd în continuare o bază minimală pentru Ker $R(s)$. Notăm $q \stackrel{\Delta}{=} m-r$ (= dim Ker $T(s)$) şi introducem

$$\bar{\delta} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{P}(s)]. \tag{4.74}$$

Fie acum $\bar{W}(s)$ o $q \times q$ matrice polinomială coloană proprie astfel încît

$$\partial_c[\bar{W}(s)] = \partial_c[\bar{P}(s)] \tag{4.75}$$

şi unde evident

$$\partial[|\bar{W}(s)|] = \bar{\delta}. \tag{4.76}$$

Introducem

$$\bar{N}(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{P}(s)\, \bar{W}^{-1}(s) \tag{4.77}$$

care este un *nulor propriu dar nu strict propriu al lui* $T(s)$ (vezi corolarul 13 din anexa A2). Nulorul (4.77) se reprezintă cu ajutorul lui (4.73) în forma

$$\bar{N}(s) = P(s)\, \bar{U}(s)\, \bar{W}^{-1}(s). \tag{4.78}$$

Fie acum $N(s)$ un nulor *propriu* oarecare al lui $T(s)$, pentru care scriem

$$P^{-1}(s)\, N(s) = Z(s)\, W^{-1}(s) \tag{4.79}$$

unde membrul drept al lui (4.79) este o factorizare primă la dreapta a lui $P^{-1}(s)\, N(s)$ cu $W(s)$ coloană proprie.

Avem atunci :

LEMA 4.1. Pentru orice nulor propriu $N(s)$ al lui $T(s)$, reprezentat prin (4.79), avem

$$\bar{\delta} \leqslant \delta \stackrel{\Delta}{=} \partial\, [|W(s)|]. \tag{4.80}$$

Demonstraţie. Este clar din (4.79) că coloanele lui $Z(s)$ formează o bază polinomială pentru Ker $R(s)$ ($\subset \mathbb{R}^m(s)$). Atunci, întrucît $\bar{U}(s)$ este o

Scanned with OKEN Scanner

bază minimală pentru Ker $R(s)$, există (vezi corolarul 19 din anexa A2) o $q \times q$ matrice polinomială nesingulară $K(s)$ astfel încît

$$Z(s) = \bar{U}(s)\, K(s). \tag{4.82}$$

Aşadar avem, ţinînd cont de (4.73) şi (4.79), din (4.82)

$$P(s)\, Z(s) = \bar{P}(s)\, K(s). \tag{4.83}$$

Întrucît $N(s)$ este proprie

$$\partial_c[P(s)\, Z(s)] \leqslant \partial_c[W(s)] \tag{4.84}$$

sau încă din (4.83):

$$\partial_c[\bar{P}(s)\, K(s)] \leqslant \partial_c[W(s)]. \tag{4.85}$$

Avînd în vedere că $\bar{P}(s)$ şi $\bar{W}(s)$ sînt matrici coloană proprie rezultă din (4.75) (vezi lema 1 punctul (i), din anexa A2) că

$$\partial_c[\bar{P}(s)\, K(s)] = \partial_c[\bar{W}(s)\, K(s)]. \tag{4.86}$$

Înlocuind (4.86) în (4.85) avem în definitiv

$$\partial_c[\bar{W}(s)\, K(s)] \leqslant \partial_c[W(s)]. \tag{4.87}$$

Atunci, întrucît $\bar{W}(s)$ şi $W(s)$ sînt matrici coloană proprie, rezultă din (4.76) şi (4.87)

$$\bar{\delta} = \partial[|\bar{W}(s)|] \leqslant \partial[|\bar{W}(s)|\,|K(s)|] = \partial[|\bar{W}(s)\, K(s)|] <$$

$$< \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{W}(s)\, K(s)] < \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[W(s)] = \partial[|W(s)|] = \delta \tag{4.88}$$

adică $\bar{\delta} < \delta$ şi lema este complet demonstrată.

Proprietatea (4.80) exprimată de lema 4.1 justifică introducerea următoarei definiţii

Definiţia 4.7. Nulorul propriu $\bar{N}(s)$ introdus prin (4.77) se numeşte P-nulor minimal (asociat factorizării (4.1)).

Observaţia 4.6. Asocierea P-nulorului minimal factorizării (4.1) trebuie înţeleasă în sensul că *numărătorul oricărui P-nulor minimal se obţine din* (4.71) *şi* (4.72) *unde* $P(s)$ *este numitorul unei factorizări* (4.1) *şi* $\bar{U}_1(s)$ *este orice matrice polinomială primă la dreapta ale cărei coloane formează o bază minimală pentru nucleul numărătorului lui* (4.1), *iar numitorul este orice* $q \times q$ *matrice coloană proprie care satisface* (4.75). De asemenea $\bar{\delta}$, definit prin (4.74), *depinde de numitorul lui* (4.1).

Observaţia 4.7. Faţă de arbitrariatea amintită mai sus a numitorului $\bar{W}(s)$ al lui $\bar{N}(s)$, rezultă imediat, din faptul că $\bar{W}(s)$ este coloană proprie, că $\bar{W}(s)$ poate fi astfel construit încît zerourile lui $|\bar{W}(s)|$ să

coincidă cu zerourile oricărui polinom de grad δ (vezi procedura de alocare din corolarul 2.5), adică *polii sistemului asociat factorizării* (4.77) *pot fi arbitrar alocați.*

Fie din nou nulorul polinomial (4.71) din care eliminăm un c.m.m.d.c. la dreapta $\bar{D}_1(s)$ și apoi matricea rezultată o facem coloană proprie prin înmulțire la dreapta cu o matrice unimodulară adecvată $\bar{V}(s)$. Rezultă

$$\bar{P}_*(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{P}_1(s)\, \bar{D}_1^{-1}(s)\, V(s) \tag{4.89}$$

care este de asemenea un nulor polinomial și ale cărei colcane formează o minimală și redusă (vezi definițiile 24 și 25 din anexa A2) pentru Ker $T(s)$. Introducem

$$\delta_* \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{P}_*(s)]. \tag{4.90}$$

Fie $\bar{W}_*(s)$ o $q \times q$ matrice polinomială coloană proprie astfel încît

$$\hat{c}_c[\bar{W}_*(s)] = \partial_c[\bar{P}_*(s)] \tag{4.91}$$

și unde evident

$$\hat{c}\,[|\bar{W}_*(s)|] = \delta_* \tag{4.92}$$

Atunci

$$\bar{N}_*(s) = \bar{P}_*(s)\, \bar{W}_*^{-1}(s) \tag{4.93}$$

este un nulor propriu dar nu strict propriu al lui $T(s)$.

Fie $N(s)$ un nulor propriu oarecare al lui $T(s)$ și fie

$$N(s) = P_*(s)\, W_*^{-1}(s) \tag{4.94}$$

o factorizare primă la dreapta a sa cu $W^*(s)$ coloană proprie. Atunci printr-o procedură de demonstrare similară celei din lema 4.1, rezultă ca fiind adevărată

LEMA 4.2. Pentru orice nulor propriu $N(s)$ al lui $T(s)$ reprezentat prin (4.94) avem

$$\delta_* < \delta_* = \hat{c}\,[|W_*(s)|] \tag{4.95}$$

sau altfel exprimat

$$\delta(\bar{N}_*(s)) < \delta(N(s)) \tag{4.96}$$

unde $\delta(\quad)$ este gradul McMillan (vezi definiția 22 din anexa A2).

Inegalitatea (4.95) sau (4.96) justifică

DEFINIȚIA 4.8. Nulorul propriu $\bar{N}_*(s)$ introdus prin (4.93) se numește nulor minimal.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 4.8. Nulorul minimal se asociază matricii $T(s)$ și nu unei factorizări (4.1) cum este cazul P-nulorului minimal în sensul că, *numărătorul unui nulor minimal este orice matrice polinomială* $\bar{P}_*(s)$ *ale cărei coloane formează o bază minimală și redusă pentru* Ker $T(s)$, iar *numitorul, orice* $q \times q$ *matrice coloană proprie* $\bar{W}_*(s)$ *care satisface* (4.91). De asemenea δ_* definit de (4.90), este unic asociat lui Ker $T(s)$ (vezi teorema 9 din anexa A 2). Similar cu observația 4.7, rezultă că *polii oricărui nulor minimal pot fi arbitrar alocați.*

Legătura dintre P-nulorul minimal și cel minimal rezultă din (4.89) și se exprimă prin egalitatea

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_* + \gamma \tag{4.97}$$

unde γ este gradul determinantului unui c.m.m.d.c. la dreapta al lui $\bar{P}_1(s)$ (lăsăm demonstrația lui (4.97) pe seama cititorului)

Dacă factorizarea (4.1) este primă, atunci $\bar{P}_1(s)$ este primă la dreapta (exercițiu pentru cititor) și în consecință

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_*.$$

4.3. REPRODUCTORUL STANDARD

Considerăm în tot acest paragraf, factorizarea (4.1) primă cu $P(s)$ coloană proprie și unde intervine expres faptul că $T(s)$ este proprie, adică $\partial_c[R(s)] \leqslant \partial_c[P(s)]$. Relațiile (4.2) și (4.32) se modifică în virtutea lui (4.72), în sensul că în locul matricii unimodulare $U_1(s)$ considerăm matricea unimodulară

$$U(s) = [U_a(s) \quad \bar{U}(s)] \stackrel{\Delta}{=} [U_a(s)\, \bar{U}_1(s) V(s)] \tag{4.98}$$

rezultînd

$$[\underbrace{R_a(s)}_{r} \quad \underbrace{0}_{m-r}] = R(s)\, U(s) = R(s)[\underbrace{U_a(s)}_{r} \quad \underbrace{\bar{U}(s)}_{m-r}] \tag{4.99}$$

și

$$[\underbrace{P_a(s)}_{r} \quad \underbrace{\bar{P}(s)}_{m-r}] = P(s)\, U(s) = P(s)\, [U_a(s) \quad \bar{U}(s)] \tag{4.100}$$

unde $\bar{P}(s)$ este coloană proprie și primă la dreapta, adică coloanele lui formează o bază minimală și redusă pentru Ker $T(s)$, iar coloanele lui $\bar{U}(s)$ formează o bază minimală pentru Ker $R(s)$.

Construim acum o completare (4.19) de un tip special. Fie astfel

$$S = \begin{bmatrix} S_a \\ \bar{S} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m - r \end{matrix} \tag{4.101}$$

o matrice de permutare astfel încît $\bar{S}\bar{P}(s)$ să fie $(m-r) \times (m-r)$ nesingulară și coloană proprie cu

$$\partial_c[\bar{P}(s)] = \partial_c[\bar{S}\bar{P}(s)]. \tag{4.102}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta este suficient ca matricea $C \triangleq \Gamma_c[\bar{P}(s)]$ să fie adusă la forma de eșalon redus pe coloane din care prin inspectare directă se construiește matricea (4.101) astfel încît $\bar{S}C$ să fie formată din primele $m-r$ linii liniar independente ale lui C în aceeași succesiune relativă (justificarea procedurii este lăsată pe seama cititorului).

Considerăm acum completarea (4.19) de forma

$$\bar{R}(s) = \bar{S}P(s) \tag{4.103}$$

(4.18) devenind

$$\hat{R}(s) = \hat{R}_0(s) \triangleq \begin{bmatrix} H_a R(s) \\ \bar{S}P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_a R_a(s) & 0 \\ \bar{S}P_a(s) & \bar{S}\bar{P}(s) \end{bmatrix} U^{-1}(s) \tag{4.104}$$

rezultînd evident $m \times m$ nesingulară. Este clar din forma lui $\hat{R}_0(s)$, ținînd cont că $T(s)$ este proprie, că :

$$\partial_c[\hat{R}_0(s)] \leqslant \partial_c[P(s)] \tag{4.105}$$

și deci $\hat{R}_0(s)\, P^{-1}(s)$ este proprie*). Înseamnă că $P(s)\, \hat{R}_0^{-1}(s)$ nu poate fi strict proprie și în consecință (conform teoremei 11 din anexa A2) se poate exprima unic prin cîtul ei și partea strict proprie adică

$$P(s)\hat{R}_0^{-1}(s) = M(s) + F_0(s)\, \hat{R}_0^{-1}(s) \tag{4.106}$$

unde

$$\partial_c[F_0(s)] < \partial_c[\hat{R}_0(s)]. \tag{4.107}$$

Din (4.107) și (4.105) rezultă imediat că

$$\partial_c[F_0(s)] < \partial_c[P(s)]. \tag{4.108}$$

Observația 4.9. Întrucît $P(s)$ este coloană proprie, relația (4.108) arată că $P(s) - F_0(s)$ este de asemenea coloană proprie cu $\partial_c[P(s)] = \partial_c[P(s) - F_0(s)]$.

Din observația 4.9 și din (4.106) rezultă că $M(s)$ este nesingulară.

Membrul stîng al lui (4.106) se explicitează imediat în funcție de (4.100) și (4.104) în forma

$$P(s)\hat{R}_0^{-1}(s) = [P_a(s) \mid \bar{P}(s)] \left[\begin{array}{c|c} H_a R_a(s) & 0 \\ \hline \bar{S}P_a(s) & \bar{S}\bar{P}(s) \end{array}\right]^{-1} \triangleq [N_{a0}(s) \mid \bar{N}_0(s)] \tag{4.109}$$

unde

$$\bar{N}_0(s) \triangleq \bar{P}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1} \tag{4.110}$$

---

*) Pentru întreg paragraful se recomandă parcurgerea propozițiilor 7 și 8 precum și a corolarului 14 din anexa A2.

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\bar{N}_{a0}(s) \triangleq (P_a(s) - \bar{P}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}(\bar{S}P_a(s))\,(H_aR_a(s))^{-1}. \tag{4.111}$$

Se vede imediat din (4.102) că $\bar{N}_0(s)$ *este proprie dar nu strict proprie.* Mai mult, din (4.110) și (4.111) rezultă direct că

$$\bar{S}\bar{N}_0(s) = I_{m-r} \tag{4.112}$$

și

$$\bar{S}\bar{N}_{a0}(s) = 0. \tag{4.113}$$

Ținînd cont de (4.112) și (4.113), (4.109) se scrie

$$P(s)\hat{R}_0^{-1}(s) = [N_{a0}(s) \vdots \bar{N}_0(s)] = S^{-1}\left[\begin{array}{c:c} S_aN_{a0}(s) & S_a\bar{N}_0(s) \\ 0 & I_{m-r} \end{array}\right]. \tag{4.114}$$

Comparînd (4.106) cu (4.114) rezultă că $M(s)$ este obligatoriu de forma

$$M(s) \triangleq [M_a(s) \vdots \bar{M}] = S^{-1}\left[\begin{array}{c:c} S_aM_a(s) & S_a\bar{M} \\ 0 & I_{m-r} \end{array}\right] = G\left[\begin{array}{c:c} S_aM_a(s) & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{array}\right] \tag{4.115}$$

cu

$$G \triangleq S^{-1}\begin{bmatrix} I_r & S_a\bar{M} \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} \tag{4.116}$$

unde $S_aM_a(s)$ este evident $r \times r$ nesingulară și unde, datorită lui (4.110), $\bar{M}$ este o *matrice constantă* de rang $m-r$.

Construim acum reproductorul (4.26), rezultînd din (4.106) (4.109) și (4.115)

$$T_{R0}(s) \triangleq P(s)\,\hat{R}_0^{-1}(s)[G_aH_a \vdots \bar{G}] = [N_{a0}(s)H_a \vdots \bar{N}_0(s)] =$$

$$= P(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}\,[M_a(s)H_a \vdots \bar{M}] =$$

$$= P(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}G\left[\begin{array}{c:c} S_aM_a(s)H_a & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{array}\right]. \tag{4.117}$$

Avem

DEFINIȚIA 4.9. Reproductorul introdus prin (4.117) se numește reproductor standard al lui $T(s)$.

De asemenea, din (4.117) rezultă

$$T^{\#}(s) \triangleq N_{a0}(s)\,H_a = P(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}\,M_a(s)H_a \tag{4.118}$$

și

$$\bar{N}_0(s) \triangleq P(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}\bar{M} \tag{4.119}$$

definind *pseudoinversa standard* și respectiv *nulorul standard.*

Scanned with OKEN Scanner

Față de relațiile (4.118) și (4.119) se impun cîteva observații :

Observația 4.10. Din (4.118) și ținînd cont de observația 4.9 rezultă că pseudoinversa standard este formată dintr-un sistem avînd matricea de transfer $P(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}$ (inversabilă, cu inversă proprie) precedat de un banc de derivatoare $M_a(s)H_a$, localizate, după cum rezultă din (4.115), în $S_a M_a(s) H_a$. Întrucît din (4.106) și observația 4.9, rezultă că $M^{-1}(s)$ este proprie, avem din (4.115) că și $(S_a M_a(s))^{-1}$ este proprie. Deci numărul de derivatoare din $S_a M_a(s)$ este egal cu numărul de integratoare din $(S_a M_a(s))^{-1}$, adică este egal cu $d_d \overset{\Delta}{=} i\,[|S_a M_a(s)|]$. În cazul în care $T(s)$ este inversabilă la dreapta ($H_a = I_p$) se vede că bancul de derivatoare conține chiar d_d derivatoare.

Semnificația matricii polinomiale $S_a M_a(s) H_a$ este însă mai profundă. Pentru a pune în evidență această semnificație introducem

DEFINIȚIA 4.10. $p \times p$ matricea polinomială nesingulară $I(s)$ se numește un interactor*) al $p \times m$ matricii de transfer $T(s)$, $\rho[T(s)] = r$, dacă

$$\lim_{s\to\infty} I(s)\; T(s) = D \tag{4.120}$$

unde D este o matrice constantă de rang r.

Calculăm $\lim_{s\to\infty} S_a M_a(s)\, H_a T(s)$. Avem

$$\lim_{s\to\infty} S_a M_a(s)\, H_a T(s) = \lim_{s\to\infty} S_a M_a(s)\, H_a R(s) P^{-1}(s) =$$

$$= \lim_{s\to\infty} S_a M_a(s) H_a R(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1} = \lim_{s\to\infty} S_a M_a(s) H_a R(s)\, \hat{R}_0^{-1}(s) M^{-1}(s) =$$

$$= \lim_{s\to\infty} S_a M_a(s)\; [I_r\; 0]\,(SM(s))^{-1}\, S = [I_r \vdots - S_a \bar{M}]\, S \overset{\Delta}{=} \bar{D}_a \tag{4.121}$$

unde s-au folosit (4.106), observația 4.9 și (4.115) și unde se vede că rang $\bar{D}_a = r$.

Constatăm acum din (4.16) că

$$I(s) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} S_a M_a(s) H_a \\ \hat{L}_b(s) \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

este $p \times p$ nesingulară. Atunci din (4.15) și (4.121) avem

$$\lim_{s\to\infty} I(s)\; T(s) = \begin{bmatrix} \bar{D}_a \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} p - r \end{matrix} \overset{\Delta}{=} D \tag{4.123}$$

unde se vede că rang $D = r$. Din definiția 4.10 și relația (4.122) avem

TEOREMA 4.7. *Matricea $I(s)$ introdusă prin (4.122) este un interactor a lui $T(s)$.*

Observația 4.11. Din (4.119) avem $T(s)\,\bar{N}_0(s) = 0$, adică explicit

$$R(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}\,\bar{M} = 0. \tag{4.124}$$

---

*) Noțiunea a fost pentru prima dată introdusă de Wolovich

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd sistemul

$$P(s)\,z(s) = u(s)$$
$$y(s) = R(s)\,z(s) \tag{4.125}$$

şi ţinînd cont de (4.108) şi de faptul că $P(s)$ este coloană proprie, relaţia (4.124) arată că:

$$u(s) = F_0(s)\,z(s) + \bar{M}\bar{v}(s) \tag{4.126}$$

este o *lege de comandă care nulează ieşirea sistemului* (4.125) pentru orice $\bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s)$ (vezi fig. 4.3).

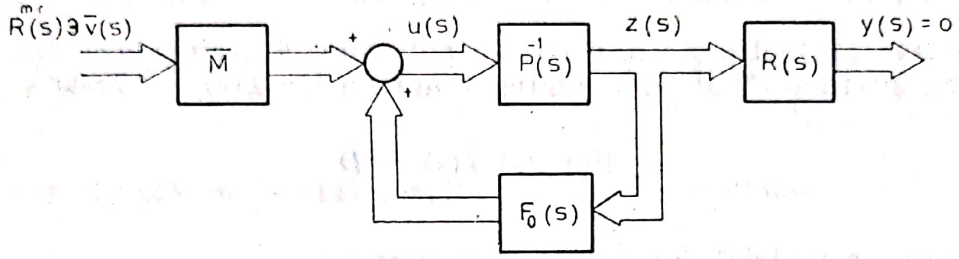


Fig. 4.3

Observaţia 4.12. Considerăm acum legea de comandă de tipul

$$u(s) = F_0(s)\,z(s) + Gv(s),\ v(s) \in \mathbb{R}^m(s), \tag{4.127}$$

cu G introdusă în (4.116), aplicată sistemului (4.125). Rezultă atunci ţinînd cont de (4.99), (4.100), (4.104), (4.106) şi (4.115)

$$R(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}\,G = R(s)\,\hat{R}_0^{-1}(s)\,M^{-1}(s)G =$$

$$= [R_a(s)\ \ 0]\begin{bmatrix} H_aR_a(s) & 0 \\ \bar{S}P_a(s) & \bar{S}\bar{P}(s) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} S_aM_a(s) & S_a\bar{M} \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1} SG =$$

$$= [R_a(s)\,(S_aM_a(s)\,H_aR_a(s))^{-1} \,\vdots\, 0]\begin{bmatrix} I_r & S_a\bar{M} \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1} SG =$$

$$= [R_a(s)\,(S_aM_a(s)\,H_aR_a(s))^{-1} \,\vdots\, 0]. \tag{4.128}$$

Considerînd acum (4.4) se vede că $X_a(s)$ este un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $R_a(s)$, adică se poate scrie

$$R_a(s) = R_1(s)X_a(s) \tag{4.129}$$

unde $R_1(s)$ este primă la dreapta iar, *zerourile lui* $X_a(s)$ *coincid cu zerourile lui* $R(s)$, adică cu zerourile lui $T(s)$, (4.1) fiind presupusă primă. Atunci (4.128) devine în definitiv, ţinînd cont de (4.129)

$$R(s)\,(P(s) - F_0(s))^{-1}G = [R_1(s)\,(S_aM_a(s)H_aR_1(s))^{-1} \,\vdots\, 0] \tag{4.130}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde membrul drept din (4.130) se vede că definește o factorizare primă la dreapta.

Așadar *legea de comandă* (4.127) *simplifică toate zerourile sistemului* (4.125)

Mai exact (calculul este lăsat pe seama cititorului), divizorul care se simplifică în membrul stîng al lui (4.130) este

$$D(s) = \begin{bmatrix} X_a(s) & 0 \\ 0 & \bar{S}\bar{P}(s) \end{bmatrix}$$

adică, în fond, (4.127) *simplifică mai mult decît numai zerourile sistemului* (4.125).

În cele ce urmează vom modifica corespunzător completarea (4.103) în scopul de a obține o alocare parțială a zerourilor lui $\hat{R}_0(s)$. Mai exact, din (4.104) rezultînd $|\hat{R}_0(s)| = \mu |H_a R_a(s)|\ |\bar{S}\bar{P}(s)|$, unde $\mu = |U(s)| = \text{ct.}$, alocarea parțială se va referi la alocarea zerourilor lui $\bar{S}\bar{P}(s)$.

Pentru aceasta fie $(m-r) \times (m-r)$ matricea polinomială $\bar{\bar{F}}(s)$ cu $\partial_c[\bar{\bar{F}}(s)] < \partial_c[\bar{S}\bar{P}(s)]$, $\bar{S}\bar{P}(s)$ coloană proprie prin construcție, care poate fi astfel aleasă încît $|\bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s)|$ *să aibă zerourile arbitrar impuse.* Fie acum $\bar{F}_a(s)$ egală cu cîtul lui $\bar{\bar{F}}(s)$ $(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}\bar{S}P_a(s)$ și fie

$$\bar{F}(s) \triangleq [\bar{F}_a(s) \vdots \bar{\bar{F}}(s)]\ U^{-1}(s) \tag{4.131}$$

și

$$\hat{F}(s) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix} \tag{4.132}$$

Construim acum (4.18) prin

$$\hat{R}(s) = \hat{R}_{0*}(s) = \hat{R}_0(s) - \hat{F}(s) = \begin{bmatrix} H_a R(s) \\ \bar{S}P(s) - \bar{F}(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} H_a R_a(s) & 0 \\ D_a(s) & \bar{D}(s) \end{bmatrix} U^{-1}(s) \tag{4.133}$$

evident nesingulară, cu

$$D_a(s) \triangleq \bar{S}P_a(s) - \bar{F}_a(s), \quad \bar{D}(s) \triangleq \bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s) \tag{4.134}$$

unde zerourile lui $\bar{D}(s)$ au fost alocate.

Reeditățm acum expresia (4.106) dar cu ajutorul matricii $\hat{R}_{0*}(s)$. Pentru aceasta, ținînd cont de (4.106), (4.115), (4.132) și (4.133), se poate scrie

$$\begin{aligned} P(s) &= M(s)\,\hat{R}_{0*}(s) + M(s)\,\hat{F}(s) + F_0(s) = \\ &= M(s)\,\hat{R}_{0*}(s) + \bar{M}\bar{F}\,(s) + F_0(s) = \\ &= M(s)\,\hat{R}_{0*}(s) + F_{0*}(s) \end{aligned} \tag{4.135}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$F_{0*}(s) \triangleq \overline{M}\,\overline{F}(s) + F_0(s) = G\hat{F}(s) + F_0(s) \tag{4.136}$$

cu G definită prin (4.116), sau încă

$$P(s)\,\hat{R}_{0*}^{-1}(s) = M(s) + F_{0*}(s)\,\hat{R}_{0*}^{-1}(s). \tag{4.137}$$

Arătăm acum că $F_{0*}(s)\,R_{0*}^{-1}(s)$ este strict proprie. Pentru aceasta scriem, din (4.136),

$$F_{0*}(s)\,\hat{R}_{0*}^{-1}(s) = (G\hat{F}(s)\,\hat{R}_0^{-1}(s) + F_0(s)\hat{R}_0^{-1}(s))\hat{R}_0(s)\hat{R}_{0*}^{-1}(s). \tag{4.138}$$

Atunci din (4.104), (4.131) și (4.132) avem

$$G\hat{F}(s)\hat{R}_0^{-1}(s) = G\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{F}_a(s) & \overline{\overline{F}}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_aR_a(s) & 0 \\ \bar{S}P_a(s) & \bar{S}\overline{P}(s) \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= G\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ (\overline{F}_a(s) - \overline{\overline{F}}(s)\,(\bar{S}\overline{P}(s)^{-1}\bar{S}P_a(s))\,(H_aR_a(s))^{-1} & \overline{\overline{F}}(s)\,(\bar{S}\overline{P}(s))^{-1} \end{array}\right] \triangleq$$

$$\triangleq G\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \Phi_a(s)\,(H_aR_a(s))^{-1} & \overline{\Phi}(s) \end{array}\right]. \tag{4.139}$$

Întrucît $H_aR_a(s)$ este prin construcție inferior triunghiulară la stînga și nesingulară, ea este linie proprie și deci $(H_aR_a(s))^{-1}$ este proprie. Cum $\overline{\overline{F}}(s)$ și $\overline{F}_a(s)$ au fost alese astfel încît $\Phi_a(s)$ și $\overline{\Phi}(s)$ să fie strict proprii, rezultă că ultima matrice din (4.139) este strict proprie și deci $G\hat{F}(s)\hat{R}_0^{-1}(s)$ este strict proprie. În continuare conform cu (4.106) $F_0(s)\,\hat{R}_0^{-1}(s)$ este strict proprie. În fine avem din (4.133)

$$\hat{R}_{0*}(s)\hat{R}_0^{-1}(s) = (\hat{R}_0(s) - \hat{F}(s))\hat{R}_0^{-1}(s) = I_m - \hat{F}(s)\hat{R}_0^{-1}(s) \tag{4.140}$$

de unde conform celor de mai sus rezultă că $\hat{R}_{0*}(s)\hat{R}_0^{-1}(s)$ este proprie cu cîtul I_m. Atunci (vezi corolarul 16 din Anexa A2) și $\hat{R}_0(s)\,\hat{R}_{0*}^{-1}(s)$ este proprie cu cîtul I_m, adică

$$\partial_c[\hat{R}_{0*}(s)] = \partial_c[\hat{R}_0(s)]. \tag{4.141}$$

Așadar, față de cele de mai sus $F_{0*}(s)\hat{R}_{0*}^{-1}(s)$ rezultă strict proprie și deci

$$\partial_c[F_{0*}(s)] < \partial_c[\hat{R}_{0*}(s)]. \tag{4.142}$$

În consecință membrul drept al lui (4.137) reprezintă exprimarea unică a lui $P(s)\,\hat{R}_{0*}^{-1}(s)$ prin cîtul ei și partea strict proprie.

De asemenea din (4.107), (4.141) și (4.142) rezultă că

$$\partial_c[F_{0*}(s)] < \partial_c[P(s)]. \tag{4.143}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se poate acum scrie, similar cu (4.109)

$$P(s)\hat{R}_{0*}^{-1}(s) = [P_a(s) \quad \bar{P}(s)] \begin{bmatrix} H_a R_a(s) & 0 \\ D_a(s) & \bar{D}(s) \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= [N_{a0*}(s) \; \bar{N}_{0*}(s)] \tag{4.144}$$

unde

$$\bar{N}_{ac*}(s) \stackrel{\Delta}{=} \bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s) \tag{4.145}$$

și

$$N_{a0*}(s) \stackrel{\Delta}{=} (P_a(s) - \bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)\, D_a(s))\,(H_a R_a(s))^{-1}. \tag{4.146}$$

Din (4.134) se vede că $\bar{N}_{0*}(s)$ este proprie dar nu strict proprie. Cu elementele de mai sus construim reproductorul (4.26) prin

$$T_{R0*}(s) \stackrel{\Delta}{=} P(s)\hat{R}_{0*}^{-1}(s)[G_a H_a \vdots \bar{G}] = [N_{a0*}(s)H_a \vdots \bar{N}_{0*}(s)] =$$

$$= P(s)\,(P(s) - F_{0*}(s))^{-1}[M_a(s)H_a \vdots \bar{M}] =$$

$$= P(s)\,(P(s) - F_{0*}(s))^{-1} G \begin{bmatrix} S_a M_a(s) H_a & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & I_{m-r} \end{bmatrix} \tag{4.147}$$

unde s-au folosit (4.137), (4.143), (4.144), (4.115) și (4.116). Introducem

DEFINIȚIA 4.11. Reproductorul definit de (4.147) se numește reproductor standard alocat.

Denumirea de alocat se justifică prin aceea că completarea (4.19) a fost astfel aleasă încît să permită alocarea unei părți din zerourile lui $|\hat{R}_{0*}(s)|$ și anume cele corespunzătoare lui $|\bar{D}(s)|$.

Observația 4.13. Din (4.147) se pot defini forme analoge lui (4.118) și (4.119) iar observațiile 4.10, 4.11 și 4.12 rămîn perfect valabile și pentru reproductorul alocat (în aceea ce privește schimbarea lui $F_0(s)$ cu $F_{0*}(s)$).

Mai mult, generalizarea modului de construcție al lui (4.131) permite să se găsească clasa legilor de comandă care nulează ieșirea sistemului (4.125). Fie pentru aceasta

$$u(s) = F(s)\, z(s) + Kv(s) \tag{4.148}$$

o lege de comandă care nulează ieșirea lui (4.124), adică

$$R(s)\,(P(s) - F(s))^{-1}K = 0. \tag{4.149}$$

Evident coloanele lui $P(s)\,(P(s) - F(s))^{-1}K$ generează un subspațiu al lui $\operatorname{Ker} T(s)$ și deci există $T_g(s)$ o matrice rațională unică astfel încît

$$P(s)\,(P(s) - F(s))^{-1}K = \bar{N}_0(s)\, T_g(s) \tag{4.150}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\bar{N}_0(s)$ este nulorul standard definit prin (4.119), de unde

$$(P(s) - F(s))^{-1}K = (P(s) - F_0(s))^{-1}\bar{M}T_g(s). \tag{4.151}$$

Atunci

$$T_g(s) = \bar{M}^s(P(s) - F_0(s))\,(P(s) - F(s))^{-1}K \tag{4.152}$$

unde $\bar{M}^s$ este o inversă la stînga a lui $\bar{M}$, rezultînd din membrul drept al lui (4.152) că $T_g(s)$ este proprie. Se poate scrie deci unic

$$T_g(s) = H + T_{g\bar{1}}(s) \tag{4.153}$$

unde H este partea întreagă (matrice constantă) iar $T_{g1}(s)$ partea strict proprie. Analog

$$(P(s) - F(s))\,(P(s) - F_0(s))^{-1} = I_m + T_p(s) \tag{4.154}$$

unde $T_p(s)$ este strict proprie. Atunci din (4.151), ţinînd cont de (4.153) şi (4.154), rezultă

$$K = \bar{M}H \tag{4.155}$$

adică orice K din legea de comandă (4.148), care nulează ieşirea lui (4.125), *este de forma* (4.155). Evidenţiem acum forma lui $F(s)$ din (4.148). Se poate scrie din (4.106), ţinînd cont de (4.104) şi (4.115)

$$P(s) - F_0(s) = M(s)\hat{R}_0(s) = S^{-1}\begin{bmatrix} S_aM_a(s) & S_a\bar{M} \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_aR(s) \\ \bar{S}P(s) \end{bmatrix} =$$

$$= G\begin{bmatrix} S_aM_a(s)\,H_aR(s) \\ \bar{S}P(s) \end{bmatrix} \triangleq GP_0(s) \tag{4.156}$$

unde G (nesingulară) a fost definită prin (4.116). Se vede imediat că $P_0(s)$ introdusă prin (4.156) este *coloană proprie* şi în consecinţă punînd

$$F(s) \triangleq F_0(s) + G\tilde{F}(s) \tag{4.157}$$

ezultă în mod obligator

$$\partial_c[\tilde{F}(s)] < \partial_c[P_0(s)] \tag{4.158}$$

adică, întrucît $P_0(s)$ este coloană proprie, $\tilde{F}(s)P_0^{-1}(s)$ trebuie să fie *strict proprie*. Plecînd de la această constatare vom evidenţia structura lui $\tilde{F}(s)$. Pentru aceasta fie matricea unimodulară

$$\tilde{U}(s) = [U_a(s)V_a(s) \vdots \bar{U}(s)] \tag{4.159}$$

(vezi (4.98), (4.99) şi (4.100)) unde $V_a(s)$ este $r \times r$ unimodulară astfel încît

$$R_{aa}(s) \triangleq S_aM_a(s)\,H_aR_a(s)V_a(s) \tag{4.160}$$

Scanned with OKEN Scanner

este coloană proprie. Atunci punînd

$$\tilde{F}(s) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{F}_{aa}(s) & \tilde{F}_{ab}(s) \\ \tilde{F}_{ba}(s) & \tilde{F}_{bb}(s) \end{bmatrix} \tilde{U}^{-1}(s) \tag{4.161}$$

rezultă din (4.149), (4.155), (4.156) şi (4.157) că

$$R(s)(P(s) - F(s))^{-1}K = R(s)(P_0(s) - \tilde{F}(s))^{-1}G^{-1}\bar{M}H =$$

$$= [R_a(s)V_a(s) \vdots 0] \begin{bmatrix} R_{aa}(s) - \tilde{F}_{aa}(s) & -\tilde{F}_{ab}(s) \\ \bar{S}P_a(s)V_a(s) - \tilde{F}_{ba}(s) & \bar{S}\bar{P}(s) - \tilde{F}_{bb}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} m-r \end{matrix}$$

$$\triangleq [R_a(s)V_a(s) \vdots 0] \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} = R_a(s)V_a(s)\Phi_{12}(s)H = 0. \tag{4.162}$$

Cum $R_a(s)V_a(s)$ este de rang maximal coloană, este obligatoriu ca

$$\Phi_{12}(s)\,H = 0. \tag{4.163}$$

Facem ipoteza că H este de rang maximal linie, cazul cel mai simplu fiind

$$H = I_{m-r}. \tag{4.164}$$

Atunci (4.163) impune

$$\Phi_{12}(s) = 0. \tag{4.165}$$

Un calcul simplu (lăsat ca exerciţiu pentru cititor) arată că (4.165) este îndeplinită dacă şi numai dacă

$$\tilde{F}_{ab}(s) = 0. \tag{4.166}$$

Aşadar (4.161) devine

$$\tilde{F}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{aa}(s) & 0 \\ \tilde{F}_{ba}(s) & \tilde{F}_{bb}(s) \end{bmatrix} \tilde{U}^{-1}(s) \tag{4.167}$$

Atunci

$$\tilde{F}(s)P_0^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{aa}(s) & 0 \\ \tilde{F}_{ba}(s) & \tilde{F}_{bb}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{aa}(s) & 0 \\ P_a(s)V_a(s) & \bar{S}\bar{P}(s) \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{F}_{aa}(s)R_{aa}^{-1}(s) & 0 \\ (\tilde{F}_{ba}(s) - \tilde{F}_{aa}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}P_a(s)V_a(s))R_{aa}^{-1}(s) & \vdots\ \tilde{F}_{bb}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1} \end{bmatrix} \triangleq$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} T_{aa}(s) & 0 \\ T_{ba}(s) & T_{bb}(s) \end{bmatrix} \tag{4.168}$$

Scanned with OKEN Scanner

trebuie să fie strict proprie, adică $T_{aa}(s)$, $T_{bb}(s)$ și $T_{ba}(s)$ trebuie să fie strict proprii. Ținînd cont că $R_{aa}(s)$ și $\bar{S}\bar{P}(s)$ sînt coloană proprie, $T_{aa}(s)$ și $T_{bb}(s)$ sînt strict proprii dacă și numai dacă

$$\partial_c[\tilde{F}_{aa}(s)] < \partial_c[R_{aa}(s)] \tag{4.169}$$

și

$$\partial_c[\tilde{F}_{bb}(s)] < \partial_c[\bar{S}\bar{P}(s)]. \tag{4.170}$$

Exprimăm unic

$$\tilde{F}_{aa}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}\,P_a(s)\,V_a(s) = \Theta_1(s) + \Theta_{sp1}(s) \tag{4.171}$$

unde $\Theta_1(s)$ și $\Theta_{sp1}(s)$ sînt partea întreagă și respectiv partea strict proprie. Dacă acum $T_{ba}(s)$ este o matrice *strict proprie* oarecare, scriem unic

$$T_{ba}(s)\,R_{aa}(s) = \Theta_2(s) + \Theta_{sp2}(s) \tag{4.172}$$

unde $\Theta_2(s)$ este cîtul, iar $\Theta_{sp2}(s)$ partea strict proprie.
Atunci rezultă din (4.168)

$$\tilde{F}_{ba}(s) = \Theta_1(s) + \Theta_2(s) + \Theta_{sp1}(s) + \Theta_{sp2}(s) \tag{4.173}$$

de unde se vede că

$$\Theta_{sp2}(s) = -\Theta_{sp1}(s). \tag{4.174}$$

Înlocuind (4.174) cu (4.172) avem

$$T_{ba}(s) = \Theta_2(s)R_{aa}^{-1}(s) - \Theta_{sp1}(s)\,R_{aa}^{-1}(s). \tag{4.175}$$

Întrucît $\Theta_{sp1}(s)\,R_{aa}^{-1}(s)$ este evident strict proprie rezultă că $\Theta_2(s)\,R_{aa}^{-1}(s)$ este strict proprie ceea ce se întîmplă dacă și numai dacă

$$\partial_c[\Theta_2(s)] < \partial_c[R_{aa}(s)]. \tag{4.176}$$

Atunci din (4.173) rezultă expresia generală a lui $\tilde{F}_{ba}(s)$ de forma

$$\tilde{F}_{ba}(s) = \Theta_1(s) + \Theta_2(s) \tag{4.177}$$

unde $\Theta_1(s)$ este partea întreagă a membrului stîng din (4.171) iar $\Theta_2(s)$ este orice $(m - r) \times r$ matrice polinomială care satisface (4.176).

Avem atunci

TEOREMA 4.8. *Clasa legilor de comandă*

$$u(s) = F(s)\,z(s) + \bar{M}\bar{v}(s),\ \bar{v}(s) \in \mathbb{R}^{m-r}(s) \tag{4.178}$$

Scanned with OKEN Scanner

care nulează ieșirea sistemului (4.125), este dată de

$$F(s) = F_0(s) + G\tilde{F}(s) \tag{4.179}$$

unde $F_0(s)$ este definit prin (4.106), G prin (4.116), iar $\tilde{F}(s)$ prin (4.167) împreună cu condițiile (4.169), (4.170), (4.177) și (4.176).

Mai mult, $\tilde{F}_{aa}(s)$ și $\tilde{F}_{bb}(s)$ pot fi astfel alese încît $|P(s) - F(s)|$ să aibă zerourile alocate, adică (4.179) să nuleze ieșirea lui (4.124) simultan cu alocarea arbitrară a polilor.

Demonstrație. Prima parte a teoremei rezultă din dezvoltările de mai sus în ipoteza particularizării lui (4.163) prin (4.165). Partea a doua, rezultă din (4.169) și (4.170) cu $\tilde{F}_{aa}(s)$ și $\tilde{F}_{bb}(s)$ astfel alese astfel încît $|R_{aa}(s) - \tilde{F}_{aa}(s)|$ și $|\bar{S}\bar{P}(s) - \tilde{F}_{bb}(s)|$ să aibă zerourile alocate ($R_{aa}(s)$ și $\bar{S}\bar{P}(s)$ sînt coloană proprie).

Observația 4.14. Descrierea generală a clasei de legi de comandă (4.148) (și nu particularizate prin (4.178)) nu se poate face separat pe K și $F(s)$, aceasta revenind în fond la (4.155) și la o condiție implicită în $F(s)$ și K, dedusă din condiția ca $F(s)\ P_0^{-1}(s)$ să fie strict proprie și din (4.163). Lăsăm efectuarea calculelor care evidențiază condiția amintită în sarcina cititorului.

Bibliografie

4.1. M. Sylverman, H. J. Payne, *Input-output structure of linear systems with application to the decoupling problem.* SIAM JC, **9**, May (1971).
4.2. W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems.* Springer Verlag, New York, 1974.
4.3. V. Ionescu, C. Popeea, *On the invertibility of linear systems.* Rev. roum. sci. tech. serie electr. energ., *2*, **22**(1977).
4.4. E. J. Davison, S. H. Wang, *Properties and calculation of transmision zeros of linear multivariable systems.* Automatica, **10**, *6*(1974).
4.5. A. G. J. Mac Farlane, N. Karcanias, *Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of algebraic, geometric and complex-variable theory.* Int. J. Contr., *1*, **24** (1976).
4.6 P. G Fereira, S. P. Bhattacharryya, *On blocking zeros.* IEEE Trans. AC—22 *2*, April (1977).
4.7. D. Jordan, L F. Godbout Jr, *On computation of the canonical pencil of a linear system,* IEEE Trans. AC—**22**, *1*, Febr. (1977).
4.8. B. C. Moore. L. M. Sylverman, *A time domain characterization of the invariant factors of a system transfer function.* Proc. JACC Conf. 1974.
4.9. G. D. Forney Jr., *Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems.* SIAM JC, **13**, Aug. (1975).
4.10. P. J. Moylan, *Stable inversion of linear systems.* IEEE Trans. AC—**22**, *2*, April (1977)
4.11. D. R. Audley, D. A. Lee, *Ill-posed and well-posed problems in system identification.* IEEE Trans AC—**19**, *6*, Dec. 1974.
4.12. S. S. Godoble, C. F. Smith, *A new control approach using the inverse systems,* IEEE Trans. AC—**17**. *5*, Oct. (1972);
4.13. D.H. Owens, *Invariant zeros of multivariable systems.* Int. J. Contr. *4*, **26** (1977).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

Sinteza exactă a sistemelor liniare

Sinteza exactă are ca obiect „modificarea" unui sistem dat, astfel încît sistemul rezultat să aibă o comportare intrare/ieşire dorită care de regulă este precizată printr-o matrice de transfer cu acelaşi număr de ieşiri ca şi sistemul iniţial. Aşadar, este vorba de a „ajusta" un sistem în aşa fel ca acesta să coincidă intrare/ieşire cu un „model" apriori impus*).

În funcţie de datele iniţiale ale problemei decurg mai multe abordări :

a) dacă sistemul iniţial este cunoscut numai prin matricea sa de transfer atunci problema sintezei exacte revine la găsirea unui compensator serie astfel încît sistemul compensat să aibă matricea de transfer identică cu cea dorită ;

b) dacă sistemul iniţial este cunoscut prin ecuaţiile de stare sau stare parţială atunci problema sintezei exacte se rezolvă prin extensiunea sistemului original, adică prin adiţionarea unei dinamici interne suplimentare, în combinaţie cu o lege de comandă adecvat aleasă.

În fine, se poate folosi o pocedură combinată, în sensul că dacă datele iniţiale ale problemei se încadrează în cazul *b*), problema se reduce şi se rezolvă în cadrul cazului *a*) după care compensatorul serie se implementează prin extensiune în combinaţie cu o lege de comandă. Pe scurt, problema se rezolvă în circuit deschis după care se implementează în circuit închis.

Menţionăm că asupra soluţiilor problemei de sinteză exactă se emit pretenţii suplimentare care se referă la minimalitate, stabilitate internă, robusteţe etc. şi care impun anumite proceduri de selecţie în cadrul rezolvării propriu-zise ale problemei originare.

5.1. SINTEZA EXACTĂ PRIN COMPENSARE SERIE

Problema sintezei exacte prin compensare serie se formulează astfel : *dîndu-se un sistem cunoscut prin $p \times m$ matricea sa de transfer $T(s)$ şi un model cu $q \times m$ matricea de transfer $T_a(s)$, să se găsească (dacă este posibil) un compensator cu $m \times q$ matricea de transfer $T_c(s)$ astfel încît*

$$T(s)\, T_c(s) = T_a(s). \tag{5.1}$$

Rezolvarea ecuaţiei (5.1) comportă trei etape constînd în :

1) a vedea dacă (5.1) are o soluţie raţională ;

2) în caz afirmativ, a se descrie clasa acestor soluţii (raţionale) ;

*) De unde şi termenul în engleză de „model matching".

Scanned with OKEN Scanner

3) a selecta în clasa soluţiilor raţionale, dacă există, subclasa soluţiilor $T_c(s)$ proprii.

Vom parcurge succesiv aceste etape, începînd prin a considera $T(s)$ şi $T_d(s)$ exprimate prin factorizările prime la dreapta

$$T(s) = R(s)\, P^{-1}(s) \tag{5.2}$$

şi respectiv

$$T_d(s) = R_d(s)\, P_d^{-1}(s) \tag{5.3}$$

unde $P(s)$ este coloană proprie.

Atunci, conform teoremei 4.1 din capitolul 4, ecuaţia (5.1) are o soluţie raţională dacă şi numai dacă

$$Y_d(s) \stackrel{\Delta}{=} L_b(s)\, R_d(s) = 0 \tag{5.4}$$

unde introducem, conform cu (4.4) şi

$$X_d(s) \stackrel{\Delta}{=} L_a(s) R_d(s) \tag{5.5}$$

Dacă (5.4) este adevărată, atunci conform teoremei 4.2 exprimată prin (4.27), clasa soluţiilor raţionale ale ecuaţiei (5.1) este dată de

$$T_c(s) = T_R(s) \begin{bmatrix} T_d(s) \\ \bar{V}(s) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

pentru toate $(m-r) \times q$ matricile raţionale $\bar{V}(s)$, unde $T_R(s)$ este un reproductor oarecare a lui $T(s)$ (construit din factorizarea (5.2)) şi unde $r \stackrel{\Delta}{=} \rho\,[T(s)]$.

Pentru scopurile impuse de etapa 3) este comod să alegem pentru $T_R(s)$ *reproductorul standard alocat* furnizat de (4.117). Atunci (5.6) devine

$$T_c(s) = P(s)\,(P(s) - F_{0*}(s))^{-1} G \begin{bmatrix} S_a M_a(s)\, H_a T_d(s) \\ \bar{V}(s) \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Întrucît $P(s)\,(P(s) - F_{0*}(s))^{-1}$ este proprie cu inversa, de asemenea proprie (vezi 4.143) rezultă că $T_c(s)$ este proprie dacă şi numai dacă $(P(s) - F_{0*}(s))P(s)^{-1}T_c(s)$ este proprie. Această afirmaţie echivalează, conform cu (5.7), cu aceea că $T(s)$ este proprie dacă şi numai dacă

$$T_{cv}(s) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} S_a M_a(s) H_a T_d(s) \\ \bar{V}(s) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

este proprie. Or, se vede imediat că $T_{cv}(s)$ este proprie dacă şi numai dacă $S_a M_a(s)\, H_a T_d(s)$ şi $\bar{V}(s)$ sînt proprii.

Avem atunci, din cele de mai sus :

TEOREMA 5.1. *a) Sinteza exactă prin compensare serie este posibilă, adică (5.1) are o soluţie raţională proprie $T_c(s)$, dacă şi numai dacă*

Scanned with OKEN Scanner

(i) $Y_d(s) = 0$ *(vezi (5.4))*
(ii) $S_a M_a(s) H_a T_d(s)$ *este proprie.*

b) Dacă (i) *şi* (ii) *sînt satisfăcute atunci clasa matricilor de transfer* $T_c(s)$ *care compensează serie* $T(s)$ *exact pînă la* $T_d(s)$ *este dată de (5.7), pentru toate* $(m-r) \times q$ *matricile raţionale proprii* $\bar{V}(s)$.

Observaţia 5.1. Din (4.145) şi (4.146), rezultă că (5.7) se poate exprima şi în forma

$$T_c(s) = T_{c0}(s) + \bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)\,\bar{V}(s) \tag{5.9}$$

unde

$$T_{c0}(s) \triangleq (P_a(s) - \bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)D_a(s))\,(H_a R_a(s))^{-1} H_a R_d(s)\, P_d^{-1}(s). \tag{5.10}$$

Ţinînd acum cont de (5.4), (5.5) şi (i) se poate scrie

$$L(s)R_d(s) = \begin{bmatrix} X_d(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array}\right] X_d(s) \tag{5.11}$$

iar din (4.129) rezultă

$$L(s)R_1(s) = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Atunci combinînd (5.11) şi (5.12) avem

$$L(s)R_d(s) = L(s)\,R_1(s)X_d(s) \tag{5.13}$$

sau încă

$$R_d(s) = R_1(s)X_d(s). \tag{5.14}$$

Rezultă atunci din (4.129) şi (5.14) că

$$(H_a R_a(s))^{-1}\,(H_a R_d(s)) = X_a^{-1}(s)\,X_d(s). \tag{5.15}$$

Înlocuind acum (5.15) în (5.10) avem în definitiv

$$T_{c0}(s) = (P_a(s) - \bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)D_a(s))X_a^{-1}(s)X_d(s)P_d^{-1}(s) \tag{5.16}$$

Observaţia 5.2. Din (5.10) rezultă

$$\bar{S}T_{c0}(s) = [\bar{S}P_a(s) - \bar{S}\bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)D_a(s)]\,(H_a R_a(s))^{-1} T_d(s) \tag{5.17}$$

Atunci din (4.134) se poate scrie

$$\begin{aligned} &\bar{S}P_a(s) - \bar{S}\bar{P}(s)\,\bar{D}^{-1}(s)D_a(s) = \\ &= \bar{S}P_a(s) - \bar{S}\bar{P}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s))^{-1}(\bar{S}P_a(s) - \bar{F}_a(s)). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ţinînd cont că $\bar{F}_a(s)$ a fost astfel determinată încît $\Theta(s)$ în

$$\bar{F}_a(s) = \bar{\bar{F}}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}\bar{S}P_a(s) - \Theta(s) \tag{5.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

să fie strict proprie, rezultă din înlocuirea lui (5.19) în (5.18)

$$\begin{aligned} \bar{S}P_a(s) - \bar{S}\bar{P}(s)\bar{D}^{-1}(s)D_a(s) = \\ = -\bar{S}\bar{P}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s))^{-1}\,\Theta(s) \end{aligned} \tag{5.20}$$

care se vede că este strict proprie. Cum $H_aR_a(s)$ este linie proprie deci $(H_aR_a(s))^{-1}$ este proprie, iar $T_a(s)$ este proprie, rezultă din (5.17) și (5.20), că $\bar{S}T_{c0}(s)$ este întotdeauna strict proprie.

Atunci $T_{c0}(s)$ *este proprie dacă și numai dacă* $S_aT_{c0}(s)$ *este proprie.* Rezultă, în consecință, din (5.9) pentru $\bar{V}(s) = 0$, echivalarea condiției (ii) din teorema 5.1, cu condiția

(i', i') $S_aT_{c0}(s)$ este proprie.

5.2. SOLUȚIA MINIMALĂ ÎN COMPENSAREA SERIE

O problemă importantă o reprezintă *determinarea în clasa* (5.7) *sau* (5.9) *a matricilor de transfer* $T_c(s)$, *a unei soluții* $\bar{T}_c(s)$ *de grad* Mc Millan *minim*, sau cum se mai spune *determinarea soluției minimale.* Cu alte cuvinte, se pune problema determinării unei matrici de transfer $\bar{T}_c(s)$, soluție a lui (5.1), astfel încît

$$\delta(\bar{T}_c(s)) \leqslant \delta(T_c(s)) \tag{5.21}$$

pentru orice matrice de transfer $T_c(s)$, de asemenea, soluție a lui (5.1).

Pentru a studia problema enunțată, presupunem că ecuația (5.1) are o soluție proprie $T_c(s)$ pe care o reprezentăm prin factorizarea

$$T_c(s) = R_c(s)P_c^{-1}(s) \tag{5.22}$$

unde $P_c(s)$ este *coloană proprie* și unde evident

$$\partial_c[R_c(s)] \leqslant \partial_c[P_c(s)] \tag{5.23}$$

Fie, de asemenea, matricea $\bar{P}(s)$ care intervine în (5.9) (vezi de asemenea, și (4.100)) care este o bază redusă și minimală pentru Ker $T(s)$. Ținînd cont de (5.22), rezultă atunci din (5.1) că avem

$$[T(s) \vdots -T_d(s)] \begin{bmatrix} R_c(s) & \bar{P}(s) \\ P_c(s) & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.24}$$

unde, datorită lui (5.23), se constată imediat că

$$\Pi(s) \triangleq \begin{bmatrix} \overbrace{R_c(s)}^{q} & \overbrace{\bar{P}(s)}^{m-r} \\ P_c(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \} q \end{matrix} \tag{5.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

este coloană proprie. Întrucît dacă (5.1) are o soluţie, Im $T_d(s) \subset$ Im $T(s)$, rezultă că

$$\rho[T_0(s)] = \rho[T(s)] = r \tag{5.26}$$

unde

$$T_0(s) \overset{\Delta}{=} [\overbrace{T(s)}^{m} \vdots \overbrace{-T_d(s)}^{q}]. \tag{5.27}$$

Avem atunci

$$\rho[\Pi(s)] = m + q - r = m + q - \rho\,[T_0(s)] \tag{5.28}$$

de unde, ţinînd cont de (5.24), rezultă că $\Pi(s)$ definită prin (5.25) este o bază redusă pentru Ker $T_0(s)$.

Fie acum $\bar{\Pi}(s)$ o bază minimală şi redusă pentru Ker $T_0(s)$. Notăm cu $\bar{\Gamma}_{cq}$ matricea formată *din ultimele q linii ale matricii* $\Gamma_c[\bar{\Pi}(s)]$. Avem atunci

LEMA 5.1. Ecuaţia (5.1) are o soluţie proprie, dacă şi numai dacă

$$\text{rang } \bar{\Gamma}_{cq} = q. \tag{5.29}$$

Demonstraţie. Presupunem că ecuaţia (5.1) are o soluţie proprie exprimată prin (5.22) ($P_c(s)$ coloană proprie). Construim matricea $\bar{\Pi}(s)$ definită prin (5.25) care este o bază redusă pentru Ker $T(s)$. Atunci (vezi corolarul 19 din anexa A2) se poate scrie

$$\Pi(s) = \bar{\Pi}(s)\, K(s) \tag{5.30}$$

unde $K(s)$ este o matrice polinomială nesingulară adecvat aleasă. Utilizînd acum rezultatul furnizat de lema 1 din anexa A2, punctul (iii), rezultă că avem

$$\Gamma_c[\Pi(s)] = \Gamma_c[\bar{\Pi}(s)]K \tag{5.31}$$

unde K este o matrice constantă nesingulară adecvat aleasă. Fie notată cu Γ_{cq} matricea formată din ultimele linii ale lui $\Gamma_c[\Pi\,(s)]$.
Atunci, datorită lui (5.23), se poate scrie

$$\Gamma_{cq} = [\underbrace{\Gamma_c[P_c(s)]}_{q} \vdots \underbrace{0}_{m-r}] \tag{5.32}$$

şi deci

$$\text{rang } \Gamma_{cq} = q. \tag{5.33}$$

Cum din (5.31) rezultă :

$$\Gamma_{cq} = \bar{\Gamma}_{cq} K \tag{5.34}$$

atunci, ţinînd cont de (5.33), obţinem (5.29).

Reciproc. Presupunem (5.29) adevărată. Există atunci în $\bar{\Gamma}_{cq}$ o $q \times q$ matrice nesingulară ale cărei coloane determină în $\bar{\Pi}(s)$ sub matricea polinomială

$$\tilde{\Pi}_c(s) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \tilde{R}_c(s) \\ \hline \tilde{P}_c(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m \\ \} q \end{matrix} \tag{5.35}$$

unde sigur avem

Scanned with OKEN Scanner

a) $\widetilde{P}_c(s)$ este coloană proprie și nesingulară și

b) $$\partial_c[\widetilde{R}_c(s)] \leqslant \partial_c[\widetilde{P}_c(s)]. \tag{5.36}$$

Atunci (vezi propoziția 8 din anexa A2)

$$\widetilde{T}_c(s) \triangleq \widetilde{R}_c(s)\,\widetilde{P}_c^{-1}(s) \tag{5.37}$$

este proprie, verificîndu-se imediat că este o soluție a lui (5.1). Lema este astfel complet demonstrată.

LEMA 5.2. Presupunem că ecuația (5.1) are o soluție proprie $T_c(s)$, reprezentată prin factorizarea (5.22) ($P_c(s)$ coloană proprie). Fie $\bar{\Pi}(s)$ o bază minimală, redusă și ordonată (vezi definiția 24 din Anexa A2) a lui Ker $T_0(s)$. Există atunci în Γ_{cq} q coloane liniar independente care determină în $\bar{\Pi}(s)$ o submatrice polinomială de forma (5.35), astfel încît

$$\hat{\partial}[|\widetilde{P}_c(s)|] \leqslant \partial\,[|P_c(s)|]. \tag{5.38}$$

Demonstrație. Fie $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_l$ gradele distincte ale coloanelor lui $\bar{\Pi}(s)$. Partiționăm $\bar{\Pi}(s)$ în forma

$$\bar{\Pi}(s) = [\underbrace{\bar{\Pi}_1(s)}_{p_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\bar{\Pi}_l(s)}_{p_l}] \tag{5.39}$$

unde toate coloanele matricii $\bar{\Pi}_i(s)$ au gradele egale cu δ_i, pentru $i = 1,2,\ldots$ $\ldots, l$. Fie acum $\hat{\Pi}(s)$ matricea obținută din (5.25) prin permutarea adecvată a coloanelor astfel încît gradele acestora să fie în ordine crescătoare. Există atunci (vezi corolarul 19 din Anexa A2) o matrice polinomială W(s) (nesingulară), astfel încît :

$$\hat{\Pi}(s) = \bar{\Pi}(s)W(s) \tag{5.40}$$

și unde (vezi corolarul 20 din anexa A2) $\partial_{ci}[\bar{\Pi}(s)] \leqslant \partial_{ci}[\hat{\Pi}(s)]$, $i = 1,2,\ldots$ $\ldots, m+q-r$. Se poate partiționa în consecință $\hat{\Pi}(s)$ în forma

$$\hat{\Pi}(s) = [\underbrace{\hat{\Pi}_1(s)}_{q_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\hat{\Pi}_l(s)}_{q_l}] \tag{5.41}$$

unde gradele coloanelor lui $\hat{\Pi}_i(s)$ sînt mai mari sau egale cu δ_i și strict mai mici decît δ_{i+1}, pentru $i = 1,2,\ldots, l-1$. Atunci (vezi corolarul 11 din anexa A2, cazul 1) matricea $W(s)$ este de forma

$$W(s) = \begin{bmatrix} \overbrace{W_{11}(s)}^{q_1} & \overbrace{W_{12}(s)}^{q_2} & \ldots & \overbrace{W_{1l}(s)}^{q_l} \\ 0 & W_{22}(s) & \ldots & W_{2l}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & W_{ll}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \\ \} p_2 \\ \\ \} p_l \end{matrix} \tag{5.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecinţă (vezi lema 1, pct. (iii) din anexa A2) avem şi

$$\Gamma_c[\hat{\Pi}(s)] = \Gamma_c[\bar{\Pi}(s)]\, W \tag{5.43}$$

unde W este o matrice constantă identică ca structură cu (5.42) şi evident nesingulară. În particular avem şi

$$\hat{\Gamma}_{cq} = \bar{\Gamma}_{cq} W \tag{5.44}$$

unde $\hat{\Gamma}_{cq}$ şi $\bar{\Gamma}_{cq}$ sînt matricile formate din ultimele linii ale lui $\Gamma_c[\hat{\Pi}(s))]$ şi respectiv $\Gamma_c[\bar{\Pi}(s)]$. Fie acum evidenţiate la nivelul matricilor $\bar{\Gamma}_{cq}$ şi $\hat{\Gamma}_{cq}$ partiţiile (5.39) şi respectiv (5.41), adică

$$\bar{\Gamma}_{cq} = [\underbrace{\bar{\Gamma}_1}_{p_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\bar{\Gamma}_l}_{p_l}] \tag{5.45}$$

respectiv

$$\hat{\Gamma}_{cq} = [\underbrace{\hat{\Gamma}_1}_{q_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\hat{\Gamma}_l}_{q_l}] \tag{5.46}$$

Fie, de asemenea, definite matricile

$$\bar{\Gamma}_{cqi} \triangleq [\bar{\Gamma}_1 \vdots \ldots \vdots \bar{\Gamma}_i], \quad i = 1, \ldots, l \tag{5.47}$$

şi respectiv

$$\hat{\Gamma}_{cqi} \triangleq [\hat{\Gamma}_1 \vdots \ldots \vdots \hat{\Gamma}_i], \quad i = 1, \ldots, l \tag{5.48}$$

Atunci, din (5.44), ţinînd cont de structura matricii W, rezultă

$$\operatorname{Im} \hat{\Gamma}_{cqi} \subset \operatorname{Im} \bar{\Gamma}_{cqi} \subset \mathbb{R}^q, \; i = 1, 2, \ldots, l. \tag{5.49}$$

Considerînd acum (5.32), rezultă că coloanele lui $\Gamma_c\,[P_c(s)]$ (rearanjate) determină o bază a lui $\mathbb{R}^q$. Fie aceste coloane plasate în $\Gamma_{i_1}, \ldots$ $\ldots, \Gamma_{i_t}$, cîte k_j coloane în fiecare matrice Γ_{i_j} cu $j = 1, \ldots, t$ şi $k_1 + \ldots + k_t = q$. Ţinînd cont de partiţia (5.41) şi de faptul că $P_c(s)$ este coloană proprie, rezultă

$$\partial_c[|P_c(s)|] \geqslant k_1 \delta_{i_1} + \ldots + k_t\, \delta_{i_t}. \tag{5.50}$$

Considerînd acum (5.49) rezultă că din $\bar{\Gamma}_{cq}$ se poate selecta o bază a lui $\mathbb{R}^q$ ale cărei coloane sînt plasate în $\bar{\Gamma}_{cqi_j}$, $j = 1,2,\ldots,t$, exact cîte k_j coloane în fiecare matrice $\bar{\Gamma}_{cqi_j}$. Aceste q coloane determină în $\bar{\Pi}(s)$ o matrice de tipul (5.3 5) care considerată la nivelul partiţiei (5.39) implică, ţinînd cont că $\tilde{P}_c(s)$ este coloană proprie, inegalitatea

$$\partial_c[|\tilde{P}_c(s)|] \leqslant k_1\, \delta_{i_1} + \ldots + k_t \delta_{i_t} \tag{5.51}$$

Scanned with OKEN Scanner

Comparînd (5.50) cu (5.51) rezultă (5.38), lema fiind complet demonstrată.

Observația 5.3. Fie $\bar{\Pi}(s)$ o bază minimală, redusă și ordonată a lui Ker $T_0(s)$ pentru care presupunem condiția (5.29) îndeplinită. Fie acum selectate primele (de la stînga la dreapta) q coloane liniar independente din $\bar{\Gamma}_{cq}$. Atunci coloanele corespunzătoare din $\bar{\Pi}(s)$ au suma gradelor *mai mică sau egală* cu suma gradelor oricăror altor q coloane din $\bar{\Pi}(s)$ corespunzătoare unei alte selecții de q coloane liniar independente din $\bar{\Gamma}_{cq}$ (lăsăm demonstrația ca exercițiu pentru cititor).

COROLARUL 5.1. Presupunem că (5.1) are o soluție proprie $T_c(s)$ exprimată prin factoritarea (5.22) presupusă *primă la dreapta* să fie $\bar{\Pi}(s)$ o bază minimală redusă și ordonată, oarecare, a lui Ker $T_0(s)$. Conform lemei 5.1 rang $\bar{\Gamma}_{cq} = q$. Fie

$$\bar{\Pi}_c(s) = \begin{bmatrix} \bar{R}_c(s) \\ \hline \bar{P}_c(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \ m \\ \} \ q \end{matrix} \tag{5.52}$$

matricea coloanelor din $\bar{\Pi}(s)$ corespunzătoare primelor q coloane liniar independente din $\bar{\Gamma}_{cq}$. Introducem acum întregul

$$\bar{d} \triangleq \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{\Pi}_c(s)] = \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{P}_c(s)] = \partial[|\bar{P}_c(s)|] \tag{5.53}$$

și fie

$$\bar{T}_c(s) \triangleq \bar{R}_c(s)\, \bar{P}_c^{-1}(s). \tag{5.54}$$

Atunci

$$\text{(i)} \quad \bar{d} = \delta(\bar{T}_c(s)^*) \leqslant \delta(T_c(s)) \tag{5.55}$$

(ii) $\bar{d}$ este un invariant al bazelor minimale și reduse ale lui Ker $T_0(s)$

Demonstrație. Întrucît rang $\bar{\Pi}_c(s) = q \ \forall\, s$ este clar că factorizarea $\bar{R}_c(s)\, \bar{P}_c^{-1}(s)$ este primă la dreapta, iar conform lemei 5.1, $\bar{T}_c(s)$ este proprie, egalitatea din (5.55) fiind deci adevărată. Ținînd cont de observația 5.3 avem atunci, cu notațiile din lema 5.2, $\partial[|\bar{P}_c(s)|] \leqslant \partial[|\tilde{P}_c(s)|]$, inegalitatea din (5.55) rezultînd ca o consecință directă a acestei leme și a faptului că factorizarea (5.22) este presupusă prima la dreapta. Pentru punctul (ii), fie $\bar{\Pi}^*(s)$ o altă bază minimală redusă și ordonată a lui Ker $T_0(s)$.

Evident, rang $\bar{\Gamma}^*_{cq} = q$. Fie

$$\bar{\Pi}^*_c = \begin{bmatrix} \bar{R}^*_c(s) \\ \hline \bar{P}^*_c(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \ m \\ \} \ q \end{matrix} \tag{5.56}$$

matricea coloanelor din $\bar{\Pi}^*(s)$ corespunzătoare primelor q coloane liniar independente din $\bar{\Gamma}^*_{cq}$. Fie, de asemenea,

$$\bar{d}^* \triangleq \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{\Pi}^*_c(s)] = \sum_{i=1}^{q} \partial_{ci}[\bar{P}^*_c(s)] = \partial[|\bar{P}^*_c(s)|] \tag{5.57}$$

---

*) δ ( ) este gradul Mc Millan.

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\bar{T}_c^*(s) = \bar{R}_c^*(s)\,\bar{P}_c^{*-1}(s). \tag{5.58}$$

Aplicînd atunci de două ori (5.55), relativ la (5.54) și (5.58), rezultă simultan $\bar{d} \leqslant \bar{d}^*$ și $\bar{d}^* \leqslant \bar{d}$, adică $\bar{d} = \bar{d}^*$, corolarul fiind complet demonstrat.

Avem atunci direct din lema 5.1 și corolarul 5.1.

TEOREMA 5.2. (SAIN). *Fie $\bar{\Pi}(s)$ o bază minimală, redusă și ordonată oarecare a lui* Ker $T_0(s)$. *Atunci:*

(j) *Ecuația (5.1) are o soluție proprie dacă și numai dacă rang* $\bar{\Gamma}_{cq} = q$.

(jj) *Dacă rang $\bar{\Gamma}_{cq} = q$, fie $\bar{\Pi}_c(s)$, de forma (5.52), matricea ale cărei coloane din $\bar{\Pi}(s)$ sînt determinate de primele q coloane liniar independente din $\bar{\Gamma}_{cq}$. Atunci $\bar{T}_c(s)$ definită prin (5.54), cu ajutorul lui (5.52), este o soluție proprie minimală a lui (5.1), adică este adevărată inegalitatea (5.21) pentru orice altă soluție proprie $T_c(s)$ a lui (5.1), iar gradul McMillan al soluțiilor minimale este furnizat de (5.53).*

COROLARUL 5.2. Fie $T_{c0}(s)$, în ipoteza că există, soluția proprie a lui (5.1) definită prin (5.16), împreună cu matricea polinomială $\bar{P}(s)$ (bază minimală și redusă a lui Ker $T(s)$). Fie $T_{c0}(s) = R_{c0}(s)\,P_{c0}^{-1}(s)$ o factorizare oarecare a lui $T_{c0}(s)$ și fie construită matricea polinomială.

$$\Pi_0(s) = \begin{bmatrix} R_{c0}(s) & \bar{P}(s) \\ P_{c0}(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

Eliminăm din $\Pi_0(s)$ un c.m.m.d.c. la dreapta, după care aducem matricea care rezultă la forma coloană proprie permutînd apoi coloanele ca gradele acestora să fie în ordine crescătoare. Se obține matricea $\bar{\Pi}_0(s)$ care este o bază minimală redusă și ordonată a lui $\mathrm{Ker}_0(s)$. Aplicînd acum procedeul de la punctul (jj) al teoremei 5.2 obținem o soluție minimală proprie a lui (5.1).

Este clar că *corolarul 5.2 furnizează o procedură de selecție din datele cu care se exprimă clasa* (5.9) *a unei soluții minimale proprii a ecuației* (5.1)

Observația 5.4. Dacă $T(s)$ este inversabilă la stînga, iar $\mathrm{Im}\,T_d(s) \subset$ $\subset \mathrm{Im}\,T(s)$, atunci dacă $T_c(s) \triangleq T^S(s)\,T_d(s)$ este proprie, $T_c(s)$ este unica soluție (proprie) a lui (5.1) fiind în același timp și soluția minimală (proprie).

5.3. POLII FICȘI AI SINTEZEI EXACTE

Introducem,

DEFINIȚIA 5.1. Poli comuni tuturor matricilor $P^{-1}(s)\,T_c(s)$ pentru toți $T_c(s)$ soluții proprii ale lui (5.1), unde $P(s)$ este numitorul unei factorizări prime la dreapta (5.2) a lui $T(s)$, se numesc *polii ficși interni* ai sintezei exacte.

Este clar (vezi teorema 10 din anexa A2) că polii ficși interni sînt bine precizați, indiferent de numitorul factorizării prime (la dreapta) (5.2). În acest sens, ținînd cont de (4.99) și (4.100), este clar că polii ficși interni sînt polii comuni tuturor matricilor raționale $[P_a(s) \mid \bar{P}(s)]^{-1}\,T_c(s)$ pentru

Scanned with OKEN Scanner

toate soluțiile proprii $T_c(s)$ ale lui (5.1). Atunci din (5.9) și (5.16) avem

$$[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]^{-1}\, T_c(s) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} X_a^{-1}(s)\, X_d(s)\, P_d^{-1}(s) \\ \hdashline -\bar{D}^{-1}(s)\, D_a(s)\, X_a^{-1}(s) X_d(s)\, P_d^{-1}(s) + \bar{D}^{-1}(s)\, \bar{V}(s) \end{array}\right] = \tag{5.60}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \tilde{P}_d^{-1}(s)\, X_{ad}(s) \\ \hdashline -\bar{D}^{-1}(s)\, D_a(s)\, \tilde{P}_d^{-1}(s)\, X_{ad}(s) + \bar{D}^{-1}(s) R_v(s)\, P_v^{-1}(s) \end{array}\right]$$

unde

$$\tilde{P}_d^{-1}(s)\, X_{ad}(s) \triangleq X_a^{-1}(s)\, X_d(s)\, P_d^{-1}(s) \tag{5.61}$$

și

$$\bar{V}(s) = \bar{R}_v(s)\, \bar{P}_v^{-1}(s) \tag{5.62}$$

în care membrul stîng al lui (5.61) este o factorizare primă la stînga, iar membrul drept al lui (5.62) este o factorizare primă la dreapta.

Observația 5.5. Parcurgînd modul de demonstrare al relației (5.15) rezultă că membrul drept al acesteia este unul și același independent de selecția H_a, sau altfel spus $(H_a R_a(s))^{-1}(H_a R_d(s))$ definește una și aceeași matrice rațională independent de selecția H_a. Se justifică atunci, ținînd cont că (5.2) și (5.3) sînt factorizări prime, să definim polii matricei raționale $(H_a R_a(s))^{-1}\,(H_a R_d(s))$ drept *zerourile necomune cu* $T_d(s)$ *ale lui* $T(s)$. Atunci *zerourile lui* $\tilde{P}_d(s)$ în (5.61) *sînt formate din zerourile necomune cu* $T_d(s)$ *ale lui* $T(s)$ *și polii lui* $T_d(s)$.

Avem atunci

TEOREMA 5.3. *Polii ficși interni ai sintezei exacte sînt zerourile necomune cu* $T_d(s)$ *ale lui* $T(s)$ *împreună cu polii lui* $T_d(s)$.

Demonstrație. Matricea polinomială a sistemului definit de membrul drept al lui (5.60) este (exercițiu pentru cititor)

$$\sum_c(s) = \left[\begin{array}{ccc:c} \tilde{P}_d(s) & 0 & 0 & -X_{ad}(s) \\ 0 & \bar{P}_v(s) & 0 & -I_q \\ D_a(s) & -\bar{R}_v(s) & \bar{D}(s) & 0 \\ \hdashline I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-r} & 0 \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c:c} \hat{P}_c(s) & -\hat{Q}_c(s) \\ \hdashline \hat{R}_c(s) & 0 \end{array}\right] \tag{5.63}$$

sau

$$[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]^{-1}\, T_c(s) = \hat{R}_c(s)\, \hat{P}_c^{-1}(s)\, \hat{Q}_c(s) \tag{5.64}$$

pentru orice $T_c(s)$ dat de (5.9). Se constată imediat din $\sum_c(s)$ că $\hat{R}_c(s)$ și $\hat{P}_c(s)$ sînt relativ prime la dreapta și în consecință, pentru a identifica polii matricei raționale $[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]^{-1}\, T_c(s)$ vom elimina un c.m.m.d.c. la stînga al lui $\hat{P}_c(s)$ și $\hat{Q}_c(s)$. Pentru aceasta aducem $[\hat{P}_c(s) \vdots \hat{Q}_c(s)]$ la forma inferior triunghiulară la stînga (vezi teorema 4 din anexa A2). Ținînd cont că $\tilde{P}_d(s)$

Scanned with OKEN Scanner

și $X_{ad}(s)$ sînt coprime la stînga, rezultă că un c.m.m.d.c. la stînga al lui $\hat{P}_c(s)$ și $\hat{Q}_c(s)$ este de forma

$$\hat{D}_c(s) = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ ? & D_v(s) & 0 \\ ? & ? & D_D(s) \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

rezultînd că

$$\hat{P}_c(s)\,\hat{D}_c^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_d(s) & 0 & 0 \\ ? & \tilde{P}_v(s) & 0 \\ ? & ? & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

unde

$$\tilde{P}_v(s) = D_v^{-1}(s)\,\bar{P}_v(s),\ \tilde{D}(s) = D_D^{-1}(s)\,\bar{D}(s). \tag{5.67}$$

Atunci rezultă din (5.66) că polii matricii raționale din membrul stîng al lui (5.64) sînt zerourile polinomului $|\tilde{P}_d(s)| \cdot |\tilde{P}_v(s)| \cdot |\tilde{D}(s)|$ și cum zerourile lui $\bar{P}_v(s)$ și $\bar{D}(s)$ pot fi arbitrar alese, rezultă conform cu (5.67) că polii ficși ai lui $[P_a(s) \mid \bar{P}(s)]^{-1} \cdot T_c(s)$ pentru toți $T_c(s)$ sînt zerourile lui $\tilde{P}_d(s)$, de unde ținînd cont de observația 5.5, teorema este complet demonstrată.

Corolarul 5.3. În condițiile teoremei 5.1 se poate construi o soluție proprie $T_c(s)$ a lui (5.1) cu $P^{-1}(s)\,T_c(s)$ stabilă, dacă și numai dacă zerourile necomune ale lui $T(s)$ cu $T_d(s)$ și polii lui $T_d(s)$, adică polii ficși interni, sînt în $\mathbb{C}^-$.

Definiția 5.2. Polii comuni tuturor soluțiilor proprii $T_c(s)$ ale ecuației (5.2) se numesc *polii ficși externi* sau, pe scurt, polii ficși ai sintezei exacte.

Pentru a evidenția polii ficși (externi), rescriem (5.60) în forma

$$[P_a(s)\ \ \bar{P}(s)]^{-1}\,T_c(s) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_d(s) & 0 \\ D_a(s) & \bar{D}(s) \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} X_{ad}(s) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}(s) \end{bmatrix} \right\} \tag{5.68}$$

Atunci clasa soluțiilor ecuației (5.1) este identică cu clasa soluțiilor ecuației :

$$[\tilde{P}_d(s)\quad 0]\,[P_a(s)\quad \bar{P}(s)]^{-1}T_c(s) = X_{ad}(s). \tag{5.69}$$

Într-adevăr, (5.69) se mai poate scrie (vezi (4.20))

$$G_a^T \begin{bmatrix} \tilde{P}_d(s) & 0 \\ D_a(s) & \bar{D}(s) \end{bmatrix} [P_a(s)\quad \bar{P}(s)]^{-1}T_c(s) = X_{ad}(s) \tag{5.70}$$

($H_a = I_r$, deoarece $\rho[\tilde{P}_d(s)] = r$), de unde, aplicînd (4.25), rezultă (5.68).

Scriem acum

$$[\tilde{P}_d(s)\quad 0]\,[P_a(s)\quad \bar{P}(s)]^{-1} \triangleq Q_{ad}^{-1}(s)\,\tilde{P}_{ad}(s) \tag{5.71}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde membrul drept al lui (5.71) este o factorizare primă la stînga. Înlocuind (5.71) în (5.69) rezultă

$$\widetilde{P}_{ad}(s)\ T_c(s) = \widetilde{Q}_{ad}(s) \tag{5.72}$$

unde

$$\widetilde{Q}_{ad}(s) \triangleq Q_{ad}(s)\ X_{ad}(s) \tag{5.73}$$

și unde presupunem $[\widetilde{P}_{ad}(s) \mid \widetilde{Q}_{ad}(s)]$ linie proprie, aceasta revenind în fond la înmulțirea la stînga a ambilor membri ai lui (5.72) cu o matrice unimodulară adecvat aleasă.

Observația 5.6. $\widetilde{P}_{ad}(s)$ și $\widetilde{Q}_{ad}(s)$ sînt coprime la stînga.
Într-adevăr punînd

$$Q_{ad}^{-1}(s)\ \widetilde{P}_{ad}(s) = \bar{\widetilde{P}}_{ad}(s)\ \bar{Q}_{ad}^{-1}(s) \tag{5.74}$$

unde membrul drept este o factorizare primă la dreapta, rezultă, ținînd cont de membrul stîng al lui (5.71) în care $[\widetilde{P}_d(s) \quad 0]$ și $X_{ad}(s)$ sînt coprime la stînga (vezi (5.61)), că $\bar{\widetilde{P}}_{ad}(s)$ și $X_{ad}(s)$ sînt coprime la stînga, adică $[\bar{\widetilde{P}}_{ad}(s)\ X_{ad}(s)]$ este primă la stînga. Atunci rezultă din egalitatea evidentă

$$[\bar{\widetilde{P}}_{ad}(s) \quad X_{ad}(s)] \begin{bmatrix} \bar{Q}_{ad}(s) & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}^{-1} = Q_{ad}^{-1}(s)[\widetilde{P}_{ad}(s) \quad \widetilde{Q}_{ad}(s)] \tag{5.75}$$

că cele două factorizări din membrul stîng și respectiv drept al lui (5.75) sînt factorizări prime la dreapta și respectiv la stînga. În consecință (vezi teorema 10 din anexa A2) $[\bar{\widetilde{P}}_{ad}(s) \quad X_{ad}(s)]$ și $[\widetilde{P}_{ad}(s) \quad \widetilde{Q}_{ad}(s)]$ sînt unimodular echivalente și cum $[\bar{\widetilde{P}}_{ad}(s)\ X_{ad}(s)]$ este primă la stînga, rezultă validitatea observației.

Observația 5.7. Eliminarea unui c.m.m.d.c. la dreapta în membrul stîng al lui (5.71), duce la simplificarea zerourilor lui $[\widetilde{P}_d(s) \quad 0]$, adică a zerourilor lui $\widetilde{P}_d(s)$, comune cu polii lui $[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]$. Ținînd cont de (5.61), cu precizarea că $[X_a(s) \vdots 0]$ și $[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]$ sînt coprime la dreapta (vezi (4.2) și (4.4), iar factorizarea (5.2) primă) vom spune că între $\widetilde{P}_d(s)$ și $[P_a(s) \vdots \bar{P}(s)]$ se simplifică numai *polii comuni ai lui* $T_d(s)$ *cu* $T(s)$. În consecință, *zerourile lui* $\widetilde{P}_{ad}(s)$ *în* (5.71) *sînt formate din zerourile lui* $T(s)$ *necomune cu cele ale lui* $T_d(s)$ (vezi observația 5.5) *și polii lui* $T_d(s)$ *necomuni cu cei ai lui* $T(s)$.

Observația 5.8. Dacă (5.1) admite o soluție proprie, atunci $P_{ad}(s)$ este *linie proprie*, iar

$$\partial_r[\widetilde{P}_{ad}(s)] \geqslant \partial_r[\widetilde{Q}_{ad}(s)]. \tag{5.76}$$

Într-adevăr, fie $T_c(s) = R_c(s)P_c^{-1}(s)$ o soluție proprie a lui (5.1).
Atunci avem :

$$\Pi_a(s)\ \Pi_c(s) = 0 \tag{5.77}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\Pi_a(s) \triangleq [\widetilde{P}_{ad}(s) \vdots \widetilde{Q}_{ad}(s)] \tag{5.78}$$

este linie proprie şi

$$\Pi_c(s) \triangleq \left[\frac{-R_c(s)}{P_c(s)}\right]. \tag{5.79}$$

Transpunînd (5.77) ne găsim în condiţiile propoziţiei 10 din anexa A2, din care rezultă că $\widetilde{P}_{ad}(s)$ este linie proprie împreună cu inegalitatea (5.76).

Avem acum

TEOREMA 5.4. *Polii ficşi externi ai sintezei exacte sînt zerourile lui* $\widetilde{P}_{ad}(s)$ *adică zerourile lui* $T(s)$ *necomune cu cele ale lui* $T_d(s)$, *împreună cu polii lui* $T_d(s)$ *necomuni cu cei ai lui* $T(s)$.

Demonstraţie. Întrucît conform observaţiei 5.8 $\Gamma_r[\widetilde{P}_{ad}(s)]$ este de rang maximal linie şi egal cu r, fie $\sum$ o $m \times m$ matrice care permută primele r coloane liniar independente ale lui $\Gamma_r[\widetilde{P}_{ad}(s)]$ pe primele r poziţii. Fie atunci

$$\widetilde{P}_{ad}(s) \cdot \sum \triangleq [\underbrace{\widetilde{P}_{ad1}(s)}_{r} \vdots \underbrace{\widetilde{P}_{ad2}(s)}_{m-r}] \tag{5.80}$$

unde $\Gamma_r[\widetilde{P}_{ad1}(s)]$ este nesingulară şi unde, evident,

$$\partial_r[\widetilde{P}_{ad1}(s)] \geqslant \partial_r[\widetilde{P}_{ad2}(s)] \tag{5.81}$$

ecuaţia (5.72) rescriindu-se în forma

$$[\widetilde{P}_{ad1}(s) \vdots \widetilde{P}_{ad2}(s)](\sum^{-1} T_c(s)) = \widetilde{Q}_{ad}(s). \tag{5.82}$$

Fie acum

$$V(s) = [\underbrace{V_1(s)}_{r} \vdots \underbrace{V_2(s)}_{m-r}] \tag{5.83}$$

o $m \times m$ matrice unimodulară cu $V_2(s)$ *coloană proprie* care aduce $[\widetilde{P}_{ad1}(s)$ $\widetilde{P}_{ad2}(s)]$ la forma de eşalon redus pe coloane, adică

$$[\widetilde{P}_{ad1}(s) \quad \widetilde{P}_{ad2}(s)]\, V(s) = [\underbrace{\widetilde{P}_{aa}(s)}_{r} \vdots 0] \tag{5.84}$$

unde, evident, $\widetilde{P}_{aa}(s)$ este nesingulară şi inferior triunghiulară la stînga, *zerourile lui* $|\widetilde{P}_{aa}(s)|$ *fiind zerourile* $\widetilde{P}_{ad}(s)$. Fie

$$V_2(s) = \left[\begin{array}{c} V_{12}(s) \\ \hdashline \underbrace{V_{22}(s)}_{m-r} \end{array}\right] \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix} \tag{5.85}$$

care este (vezi corolarul 8 din anexa A2) primă la dreapta și, în consecință, ținînd cont de (5.84), $V_2(s)$ este o bază minimală și redusă a lui Ker $[\widetilde{P}_{ad1}(s)\ \widetilde{P}_{ad2}(s)]$. Atunci, deoarece $\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\ \widetilde{P}_{ad2}(s)$ este proprie ($\widetilde{P}_{ad1}(s)$ linie proprie și inegalitatea (5.81)) rezultă (vezi propoziția 10 din anexa A2) că $V_{21}(s)\ V_{22}^{-1}(s)$ este o factorizare proprie primă la dreapta cu $V_{22}(s)$ coloană proprie. În consecință, conform cu corolarul 3.2 există $(m-r)\times(m-r)$ și $(m-r)\times r$ matricile polinomiale $M_2(s)$ și $M_1(s)$ cu $M_2(s)$ astfel încît

$$M_2(s)\ V_{22}(s) + M_1(s)V_{12}(s) = D(s) \tag{5.86}$$

unde $D(s)$ este $(m-r)\times(m-r)$ coloană proprie cu zerourile lui $|D(s)|$ arbitrar alocate și unde

$$\partial_{ci}[D(s)] = \partial_{ci}[V_{22}(s)] + \nu - 1,\ i = 1,\ldots,m-r \tag{5.87}$$

$$\partial[M_1(s)],\ \delta[M_2(s)] \leqslant \nu - 1 \tag{5.88}$$

cu (vezi observația 3.2 (3.34))

$$\nu \triangleq \max_i \partial_{ri}[\widetilde{P}_{ad1}(s)]. \tag{5.89}$$

Atunci din (5.84) și (5.86) avem egalitatea

$$\left[\begin{array}{c:c} \widetilde{P}_{ad1}(s) & \widetilde{P}_{ad2}(s) \\ \hdashline M_1(s) & M_2(s) \end{array}\right] V(s) = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{P}_{aa}(s) & 0 \\ \hdashline E(s) & D(s) \end{array}\right] \tag{5.90}$$

ceea ce arată că matricea care înmulțește la stînga pe $V(s)$ în (5.90) este nesingulară avînd zerourile egale cu zerourile lui $|\widetilde{P}_{aa}(s)|\cdot|D(s)|$, cele ale lui $\widetilde{P}_{aa}(s)$ fiind fixe, iar cele ale lui $D(s)$ alocabile.

Ecuația (5.82) poate fi scrisă acum în forma

$$G_a^T \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{P}_{ad1}(s) & \widetilde{P}_{ad2}(s) \\ \hdashline M_1(s) & M_2(s) \end{array}\right] (\Sigma^{-1}T_c(s)) = \widetilde{Q}_{ad}(s). \tag{5.91}$$

Atunci (vezi (4.23)) soluția generală a lui (5.91) este de forma

$$\Sigma^{-1}T_c(s) = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{P}_{ad1}(s) & \widetilde{P}_{ad2}(s) \\ \hdashline M_1(s) & M_2(s) \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \widetilde{Q}_{ad}(s) \\ \hdashline \widetilde{V}(s) \end{array}\right] \tag{5.92}$$

pentru orice $(m-r)\times q$ matrice rațională $\widetilde{V}(s)$. Explicităm inversa din membrul drept al lui (5.90).

Pentru aceasta apelăm la teorema lui Frobenius*), rezultînd:

$$\Sigma^{-1}T_c(s) = \left[\begin{array}{c} \widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s) + \widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\widetilde{P}_{ad2}(s)V_{22}(s)\,D^{-1}(s)M_1(s)\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s) \\ -V_{22}(s)\,D^{-1}(s)\,M_1(s)\,\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s) \end{array}\right] + \tag{5.93}$$

$$+ \left[\begin{array}{c} -\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{P}_{ad2}(s)\,V_{22}(s)\,D^{-1}(s)\,V(s) \\ V_{22}(s)\,D^{-1}(s)\,\widetilde{V}(s) \end{array}\right]$$

*) $\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A_+^{-1}\,A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array}\right]$, A nesingulară

$$H \triangleq D - CA^{-1}B$$

Scanned with OKEN Scanner

unde utilizînd (5.84), (5.85) a rezultat

$$\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{P}_{ad2}(s) = -V_{12}(s)V_{22}^{-1}(s) \tag{5.94}$$

ceea ce a permis *explicitarea matricei* H*)

$$H \triangleq M_2(s) - M_1(s)\,\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{P}_{ad2}(s) \tag{5.95}$$

în forma (vezi (5.87))

$$H = (M_2(s)\,V_{22}(s) + M_1(s)\,V_{12}(s))\,V_{22}^{-1}(s) = D(s)\,V_{22}^{-1}(s) \tag{5.96}$$

explicitare care permite obținerea din expresia generală a lui Frobenius*), a formei (5.91).

Să observăm acum că din (5.87), (5.88) și din faptul că $D(s)$ este coloană proprie, rezultă că $V_{22}(s)D^{-1}(s)M_1(s)$ este proprie. De asemenea din (5.76), (5.81) și din faptul că $P_{ad1}(s)$ este linie proprie rezultă că $\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{P}_{ad2}(s)$, $\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s)$, $\widetilde{P}_{ad1}^{-1}(s)$ sînt matrice raționale proprii.

În consecință, primul termen al sumei din membrul drept al lui (5.93) este o matrice rațională proprie. De asemenea, se constată că cel de-al doilea termen al sumei din membrul drept al lui (5.93) este propriu dacă și numai dacă $V_{22}(s)\,D^{-1}(s)\,\widetilde{V}(s)$ este o matrice rațională proprie. Or, conform cu (5.87) și (5.88) aceasta se întîmplă dacă și numai dacă

$$\text{diag}\,(s^{-(\nu-1)})\;\widetilde{V}(s) \text{ este } \textit{proprie}. \tag{5.97}$$

Așadar, în virtutea celor de mai sus ecuația (5.72), cu $[\widetilde{P}_{ad}(s)\,\vdots\,\widetilde{Q}_{ad}(s)]$ linie proprie, are o soluție proprie dacă și numai dacă este adevărată inegalitatea (5.76). Dacă (5.76) este adevărată, clasa soluțiilor proprii este dată de (5.92) pentru toate $(m-r)\times q$ matricile raționale $\widetilde{V}(s)$ care satisfac condiția (5.97) (cu ν definit prin (5.89)).

Fie acum, în ipoteza că există, $T_c(s)$ o soluție proprie oarecare a lui (5.1) și deci a lui (5.72). Avem atunci din (5.90) și (5.92)

$$V(s)\,\Sigma^{-1}\,T_c(s)\begin{bmatrix}\widetilde{P}_{aa}(s) & 0\\ E(s) & D(s)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_{ad}(s)\\ \hdashline \widetilde{V}(s)\end{bmatrix} = \tag{5.98}$$

$$= \begin{bmatrix}\widetilde{P}_{aa}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s)\\ \hdashline -D^{-1}(s)\,E(s)\,\widetilde{P}_{aa}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s) + D^{-1}(s)\widetilde{V}(s)\end{bmatrix}$$

unde, datorită observației 5.6 și relațiilor (5.80) și (5.84), $P_{aa}^{-1}(s)\,\widetilde{Q}_{ad}(s)$ este o factorizare primă la stînga. Atunci ultima matrice din (5.98) este similară ultimei matrice din (5.60) și în consecință, conform teoremei 5.3, zerourile fixe ale lui (5.98) sînt zerourile lui $\widetilde{P}_{aa}(s)$, adică zerourile lui $\widetilde{P}_{ad}(s)$, de unde, ținînd cont de observația 5.7, teorema este complet demonstrată.

COROLARUL 5.4. În ipoteza existenței unei soluții proprii a ecuației (5.1), se poate construi o soluție proprie stabilă a acesteia, dacă și numai dacă

*) (vezi nota de la pag 126)

zerourile lui $T(s)$ necomune cu cele ale lui $T_d(s)$ împreună cu polii lui $T_d(s)$ necomuni cu cei ai lui $T(s)$, adică polii ficşi (externi), sînt în $\mathbb{C}^-$.

Observaţia 5.9. Din teoremele 5.3 şi 5.4 rezultă imediat că polii ficşi interni conţin polii ficşi externi şi în consecinţă, dacă polii ficşi interni sînt în $\mathbb{C}^-$ şi polii ficşi externi vor fi în consecinţă în $\mathbb{C}^-$.

Observaţia 5.10. Cum este puţin probabil ca modelul $T_d(s)$ (ales de proiectant) să aibă polii în $\mathbb{C}^+$, rezultă, ţinînd cont de corolarele 5.3 şi 5.4 cît şi de observaţia 5.9, că sursa principală de instabilitate a soluţiilor $T_c(s)$ o reprezintă posibila existenţă a zerourilor lui $T(s)$ necomune cu cele ale lui $T_d(s)$, în $\mathbb{C}^+$. În acest caz, unica modalitate de obţinere a unor soluţii stabile este modificarea modelului $T_d(s)$ de aşa manieră încît zerourile lui $T(s)$ aflate în $\mathbb{C}^+$ să se simplifice în totalitate. Cu alte cuvinte, zerourile lui $T_d(s)$ trebuie să conţină obligatoriu acele zerouri ale lui $T(s)$ aflate în $\mathbb{C}^+$. Aşadar, *în general, modelul $T_d(s)$ nu poate fi ales independent de $T(s)$.*

O *procedură* de modificare a modelului $T_d(s)$ în sensul observaţiei de mai sus este următoarea. Se factorizează $X_d(s)$ (vezi (5.16)) în

$$X_d(s) = X_d^+(s)\, X_d^-(s) \tag{5.99}$$

unde zerourile lui $X_d^+(s)$ se găsesc în $\mathbb{C}^+$ iar cele ale lui $X_d^-(s)$ în $\mathbb{C}^-$. Se alege $X_d(s)$ în (5.16) de forma

$$X_d(s) = X_d^+(s)\, R_d^*(s) \tag{5.100}$$

unde $R_d^*(s)$ este o $r \times q$ matrice polinomială arbitrară, după care se alege $P_d(s)$ în (5.16) în forma diagonală nesingulară $P_d^*(s)$ cu gradele polinoamelor de pe diagonală, atît cît este necesar ca condiţia (i', i') de la observaţia 5.2 să fie îndeplinită. Se recalculează cu (5.16) noul $T_{c0}(s)$, notat $T_{c0}^*(s)$, rezultînd modelul

$$T_d^*(s) = T(s) T_{c0}^*(s) \tag{5.101}$$

care, evident, este propriu. Justificarea procedurii este lăsată cititorului.

5.4. SINTEZA EXACTĂ ŞI ESTIMAREA STĂRILOR

În acest paragraf vom pune în evidenţă conexiunea care există între teoria estimatorilor şi sinteza exactă, conexiune care permite evidenţierea comodă a unor aspecte legate de *minimalitatea* şi *stabilitatea* estimatorilor.

Pentru precizarea cadrului problemei fie sistemul

$$P(s)\, z(s) = u(s) \tag{5.102}$$

$$y(s) = R(s)\, z(s) \tag{5.103}$$

unde $R(s)$ şi $P(s)$ sînt coprime la dreapta cu $P(s)$ coloană proprie şi unde

$$\partial_c[R(s)] \leqslant \partial_c[P(s)], \tag{5.104}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar,

$$d_i \triangleq \partial_{ci}[P(s)] \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{5.105}$$

cu $n \triangleq \partial\,[|P(s)|] = d_1 + \ldots + d_m$.

Fie (A, B, C, D)*) echivalentul de stare standard controlabil al reprezentării polinomiale standard controlabile $(P(s), I_m, R(s), 0)$ adică

$$\dot{x} = A\,x + Bu \tag{5.106}$$

$$y = C\,x + Du \tag{5.107}$$

unde perechea (C, A) este observabilă ($R(s)$, $P(s)$ coprime la dreapta) și, în care presupunem (fără a restrînge generalitatea) că

$$\text{rang } C = p. \tag{5.108}$$

Legătura dintre sistemul (5.102), (5.103) și sistemul (5.106), (5.107) este evidențiată prin (vezi paragraful 2.2)

$$P(s) = \Gamma_c P_m(s) \tag{5.109}$$

$$R(s) = CS(s) + DP(s) \tag{5.110}$$

$$x(s) = S(s)\,z(s) \tag{5.111}$$

unde $S(s)$ a fost introdusă prin (2.59) și care se poate construi datorită lui (5.105).

Introducem :

Definiția 5.3. Se numește estimator de stare al sistemului (5.102), (5.103) sau respectiv (5.106), (5.107), sistemul

$$Q(s)\,\hat{x}(s) = H(s)\,y(s) + K(s)\,u(s) \tag{5.112}$$

cu

$$T_e(s) \triangleq Q^{-1}(s)\,[K(s) \quad H(s)] \tag{5.113}$$

proprie, pentru care are loc egalitatea

$$\hat{x}(s) = x(s) \tag{5.114}$$

cu $\hat{x}(s)$ și $x(s)$ furnizați de (5.112) și (5,111) respectiv. Dacă $|Q(s)|$ este un polinom hurwitzian, estimatorul (5.112) se numește stabil.

De observat din (5.112) și (5.111) că $Q(s)$, $K(s)$ $H(s)$, sînt $n \times n$, $n \times m$ și $n \times p$ matrici, respectiv.

Înlocuind (5.102) și (5.103) în (5.112) și explicitînd (5.114) prin (5.111) rezultă ecuația

$$K(s)\,P(s) + H(s)\,R(s) = Q(s)\,S(s) \tag{5.115}$$

*) Indicele c care apare în elemente componente ale echivalentului (vezi § 2.2) a fost suprimat.

Scanned with OKEN Scanner

sau ţinînd cont de (5.113), (5.115) devine

$$T_e(s)\begin{bmatrix} I_m \\ T(s) \end{bmatrix} = S(s)\,P^{-1}(s). \tag{5.116}$$

Se constată imediat din transpunerea ecuaţiei (5.116) că aceasta este *o problemă de sinteză exactă cu* $T_e(s)$ *ca necunoscută.*

Pentru rezolvarea ei rescriem ecuaţia (5.115) în forma

$$[K(s) \quad H(s) \,\vdots\, \underbrace{Q(s)}_{n}] \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \\ -S(s) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.117}$$

urmînd apoi să aplicăm, prin dualizare, procedura furnizată de teorema 5.2. Aceasta revine în fond la construirea unei matrici $N(s)$, astfel încît coloanele lui $N^T(s)$ să formeze o bază minimală, redusă şi ordonată pentru Ker $M^T(s)$, $M^T(s) \triangleq [P^T(s) \,\vdots\, R^T(s) \,\vdots\, -S^T(s)]$. Evident, $N(s)$ este primă la stînga, linie proprie şi cu liniile astfel dispuse încît gradele acestora sînt în ordine crescătoare de sus în jos. Vom spune (prin dualizarea definiţiilor 2.4 şi 2.5 din anexa A2) că liniile lui $N(s)$ formează o bază (linie) minimală, redusă şi ordonată a nucleului la stînga a lui $M(s)$ ($N(s)M(s) = 0$).

Pentru a obţine direct o astfel de bază, dualizăm procedura dată în teorema 12 din anexa A2, rezultînd următoarea succesiune de operaţii unimodulare.

0°. Scriem matricele:

$$U(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix},\quad M(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \\ -S(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(s) \\ CS(s) + DP(s) \\ -S(s) \end{bmatrix}$$

ultima exprimare a lui $M(s)$ rezultînd din (5.110).

1°. Adunăm la doua bloc linie din $U(s)$ şi $M(s)$ ultima bloc linie din $U(s)$ şi $M(s)$ înmulţită cu C. Rezultă

$$U^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & C \\ 0 & 0 & I_n \end{bmatrix},\quad M^{(1)}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ DP(s) \\ -S(s) \end{bmatrix}$$

2°. Înmulţim ultima bloc linie din $U^{(1)}(s)$ şi $M^{(1)}(s)$ cu $sI_n - A$ adică

$$U^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & C \\ 0 & 0 & sI_n - A \end{bmatrix},\quad M^{(2)}(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ DP(s) \\ -(sI_n - A)S(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(s) \\ DP(s) \\ -BP(s) \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde în ultima exprimare a lui $M^{(2)}(s)$ s-a folosit egalitatea $(sI_n - A)$ $S(s) = BP(s)$ (vezi paragraful 2.2).

3°. Adunăm la bloc liniile 2 și 3 ale lui $U^{(2)}(s)$ și $M^{(2)}(s)$ prima bloc linie din $U^{(2)}(s)$ și $M^{(2)}(s)$ înmulțită cu $-D$ și respectiv cu B. Avem atunci

$$U^{(3)}(s) = \left[\begin{array}{ccc} I_m & 0 & 0 \\ \hdashline -D & I_p & C \\ B & 0 & sI_n - A \end{array}\right], \quad M^{(3)}(s) = \left[\begin{array}{c} P(s) \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

de unde rezultă că liniile lui

$$N(s) \triangleq \left[\begin{array}{cc:c} -D & I_p & C \\ B & 0 & \underbrace{sI_n - A}_{n} \end{array}\right] \tag{5.118}$$

formează o bază minimală ($N(s)$ este primă la stînga) pentru nucleul la stînga al lui $M(s)$. Se constată imediat că

$$\Gamma_r[N(s)] = \left[\begin{array}{cc:c} -D & I_p & C \\ 0 & 0 & \underbrace{I_n}_{n} \end{array}\right] \tag{5.119}$$

este de rang maximal linie, iar liniile lui $N(s)$ au gradele ordonate crescător de sus în jos. Așadar, liniile lui $N(s)$ formează o bază minimală, redusă și ordonată a nucleului la stînga a lui $M(s)$.

Să observăm acum că ultimele n coloane din $\Gamma_r[N(s)]$ sînt liniar independente, adică condiția duală lui (5.29) este îndeplinită și în consecință (5.116) are o soluție proprie de ordin (de realizare) minim. Construirea acestei soluții revine la selectarea primelor (de sus în jos) linii liniar independente din

$$\Gamma_{rn} \triangleq \left[\begin{array}{c} C \\ I_n \end{array}\right] \tag{5.120}$$

Pentru aceasta uzăm de condiția (5.108) supraadiționînd liniilor lui C, $n-p$, linii W, astfel încît

$$T \triangleq \left[\begin{array}{c} W \\ C \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n-p \\ \}p \end{array} \tag{5.121}$$

să fie nesingulară (vezi și observația 1.7) și definim :

$$N_T(s) \triangleq \left[\begin{array}{cc} I_m & 0 \\ 0 & T \end{array}\right] N(s) \left[\begin{array}{ccc} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & T^{-1} \end{array}\right] \tag{5.122}$$

Scanned with OKEN Scanner

ale cărei linii formează o bază minimală, redusă și ordonată pentru nucleul la stînga a lui

$$M_T(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \\ TS(s) \end{bmatrix} \tag{5.123}$$

Se vede imediat din (5.123) că noua bază (5.122) corespunde transformării de stare $\bar{x} = Tx$ a sistemului (5.106), (5.107). Efectuînd membrul drept al lui (5.122) obținem imediat

$$N_T(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} -D & I_p & 0 & I_p \\ \bar{B}_1 & 0 & sI_{n-p} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ \bar{B}_2 & 0 & -\bar{A}_{21} & sI_p - \bar{A}_{22} \end{array}\right] \tag{5.124}$$

unde

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = TAT^{-1} \text{ și } \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} = TB \tag{5.125}$$

și unde conform cu lema 1.1 perechea $(\bar{A}_{21}, \bar{A}_{11})$ este observabilă. Se vede imediat acum din

$$\Gamma_r[N_T(s)] = \left[\begin{array}{cc|cc} -D & I_p & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_{n-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{array}\right] \tag{5.126}$$

că primele n linii ale matricii formate din ultimele n coloane ale lui $\Gamma_r[N_T(s)]$ sînt liniar independente, rezultînd în consecință din (5.124) că *ordinul minim* al estimatorului este

$$\bar{d} = n - p = \partial[|P(s)|] - p. \tag{5.127}$$

Pentru obținerea unui estimator stabil considerăm matricea

$$N_{TL}(s) \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc} -D & I_p & 0 & I_p \\ \bar{B}_1 & 0 & sI_{n-p} - \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} & sL - L\bar{A}_{22} - \bar{A}_{12} \\ \bar{B}_2 & 0 & -\bar{A}_{21} & sI_p - \bar{A}_{22} \end{array}\right] \tag{5.128}$$

unimodular echivalentă la stînga cu $N_T(s)$, ale cărei linii formează, de asemenea, o bază minimală, redusă și ordonată a nucleului la stînga a lui $M_T(s)$ și unde matricea L a fost astfel aleasă încît $|sI_{n-p} - \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{12}|$ să fie hurwitzian (perechea $(\bar{A}_{21}, \bar{A}_{11})$ observabilă).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci rezultă în definitiv din (5.128), ținînd cont de (5.126) (și de schimbarea de variabilă amintită mai sus) că

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ sI_{n-p} - \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21} & sL - L\bar{A}_{22} - \bar{A}_{12} \end{bmatrix} T, \; [K(s) \vdots H(s)] = \left[\begin{array}{c|c} -D & I_p \\ \bar{B}_1 & 0 \end{array}\right] \tag{5.129}$$

definește un estimator de stare *minimal* și *stabil* ($|Q(s)| = \beta |sI_{n-p} - \bar{A}_{11} - L\bar{A}_{21}|$, β constantă $\neq 0$) pentru sistemul (5.102), (5.103) sau respectiv pentru (5.106), (5.107). Avem așadar

TEOREMA 5.5. *Pentru sistemul (5.102), (5.103) cu $R(s)$ și $P(s)$ coprime la dreapta și $P(s)$ coloană proprie se poate construi un estimator de stare stabil (cu polii alocați arbitrar în $\mathbb{C}^-$) de ordin minim $\bar{d} = \bar{o}\,[|P(s)|] - p$.*

Observația 5.11. Rescriind ecuația (5.116) în forma

$$T_e(s) \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = S(s). \tag{5.130}$$

se constată imediat că (5.130) este o ecuație exact de același tip cu (5.72), scrisă însă într-o formă transpusă. Întrucît $R(s)$ și $P(s)$ sînt coprime la dreapta $\begin{bmatrix} R(s) \\ P(s) \end{bmatrix}$ nu are zerouri și în consecință, conform teoremei 5.4, (5.130) *nu are poli fici*. Această ultimă constatare explică în fond posibilitatea *alocării arbitrare și în totalitate a polilor lui $T_e(s)$, alocare care în acest caz de sinteză exactă se poate face chiar pe soluția minimală fără creșterea ordinului.*

Observația 5.12. Estimatorul minimal furnizat de (5.129) nu este strict propriu (dar este propriu). Dacă se dorește construcția unui estimator stabil *strict propriu*, acesta rezultă direct din (5.118) cu obligația de a utiliza, în construcția acestuia, numai ultimele n linii din $N(s)$. Atunci, considerînd în locul lui $N(s)$, matricea

$$N_{\tilde{L}}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -D & I_p & 0 \\ B + \tilde{L}D & -\tilde{L} & sI_n - A - \tilde{L}C \end{array}\right] \tag{5.131}$$

cu matricea $\tilde{L}$ astfel aleasă încît $|sI_n - A - \tilde{L}C|$ să fie hurwitzian (perechea (C, A) este observabilă) rezultă imediat estimatorul dorit furnizat de

$$\tilde{Q}(s) = sI_n - A - \tilde{L}C, \; [\tilde{K}(s), \vdots \tilde{H}(s)] = [B + \tilde{L}D \vdots -\tilde{L}] \tag{5.132}$$

avînd ordinul

$$\tilde{d} = n = \partial\,[|P(s)|]. \tag{5.133}$$

Se constată imediat din inspectarea lui $N(s)$ că n este *ordinul minim al oricărui estimator strict propriu*. Cu alte cuvinte (5.127) și (5.133) trebuie interpretate în sensul că *cel mai mic* (ca ordin) *estimator propriu de stare are ordinul $n-p$, putînd fi totodată, și alocat, iar cel mai mic* (ca ordin) *estimator strict propriu de stare are ordinul n, putînd fi, de asemenea alocat.*

Scanned with OKEN Scanner

De regulă estimatorul de stare (5.129) se numeşte *estimator de stare minimal*, iar cel furnizat de (5.132) *estimator de stare unitar*.

DEFINIŢIA 5.4. Se numeşte estimator al legii de reacţie

$$u(s) = F(s)\, z(s) \tag{5.134}$$

cu $z(s)$ starea parţială a sistemului (5.102), (5.103) şi

$$\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)] \tag{5.135}$$

sistemul

$$Q(s)\, w(s) = H(s)\, y(s) + K(s)\, u(s) \tag{5.136}$$

cu

$$T_{er}(s) \triangleq Q^{-1}(s)\, [K(s) \quad H(s)] \tag{5.137}$$

proprie, pentru care are loc egalitatea

$$w(s) = F(s)\, z(s). \tag{5.138}$$

Dacă $|Q(s)|$ este un polinom hurwitzian atunci estimatorul (5.136) se numeşte stabil.

De observat din (5.136) şi (5.138) că $Q(s)$, $K(s)$ şi $H(s)$ sînt $m \times m$, $m \times m$ şi $m \times p$ matrici, respectiv.

Înlocuind (5.102), (5.103) şi (5.138) în (5.136) rezultă ecuaţia

$$K(s)\, P(s) + H(s)\, R(s) = Q(s)\, F(s) \tag{5.139}$$

care se mai poate scrie şi

$$T_{er}(s) \begin{bmatrix} I_m \\ T(s) \end{bmatrix} = F(s) P^{-1}(s) \tag{5.140}$$

ceea ce arată *că construirea unui estimator de lege de reacţie este o problemă de sinteză exactă.*

Aşa cum s-a văzut în teorema 3.2 se poate construi întotdeauna un estimator de lege de reacţie stabil pentru sistemul (5.102) şi (5.103) (cu $R(s)$, $P(s)$ coprime drepte şi $P(s)$ coloană proprie). În cele ce urmează vom fi interesaţi în primul rînd în problema minimalităţii soluţiilor (proprii) ecuaţiei (5.140). Pentru aceasta, rescriem ecuaţia (5.139) în forma:

$$[K(s) \;\; H(s) \,\vdots\, Q(s)] \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \\ -F(s) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.141}$$

aplicînd ca mai sus, prin dualizare, procedura furnizată de teorema 5.2. Fie în acest sens

$$\begin{bmatrix} -R(s) \\ F(s) \end{bmatrix} P^{-1}(s) = [\widetilde{H}(s) \,\vdots\, \widetilde{Q}(s)]^{-1} \widetilde{K}(s) \tag{5.142}$$

unde membrul drept al lui (5.142) este o factorizare primă la stînga a matricii raţionale din membrul stîng care este proprie ($P(s)$ coloană proprie

Scanned with OKEN Scanner

și inegalitățile (5.104) și (5.135)) cu $[\widetilde{H}(s) \vdots \widetilde{Q}(s)]$ linie proprie și cu liniile astfel dispuse încît gradele acestora sînt în ordine crescătoare de sus în jos. Atunci (vezi propoziția 9 și corolarele 21, 22 și 23 din anexa A2) liniile matricii

$$\widetilde{N}(s) = [\widetilde{K}(s) \vdots \widetilde{H}(s)\ \widetilde{Q}(s)] \tag{5.143}$$

formează o bază minimală redusă și ordonată a nucleului la stînga al lui

$$\widetilde{M}(s) \triangleq \begin{bmatrix} P(s) \\ \cdots\cdots \\ R(s) \\ \\ -F(s) \end{bmatrix} \tag{5.144}$$

și unde $\Gamma_r[\widetilde{N}(s)]$ este de forma

$$\Gamma_r[\widetilde{N}(s)] = [\,? \vdots \Gamma_r[[\widetilde{H}(s) \vdots \widetilde{Q}(s)]]] \tag{5.145}$$

întrucît $\Gamma_r[[\widetilde{H}(s) \vdots \widetilde{Q}(s)]]$ este nesingulară, ultimele m coloane din această matrice formează o matrice de rang m identică cu matricea formată din ultimele m coloane ale matricii $\Gamma_r[\widetilde{N}(s)]$. Așadar, conform teoremei 5.2, ecuația (5.140) are o soluție proprie minimală, care se construiește reținînd din $\widetilde{N}(s)$ acele linii care corespund primelor, de sus în jos, m linii liniar independente din $\Gamma_r[\widetilde{N}(s)]$. În toată această ultimă dezvoltare nu a intervenit expres faptul că $R(s)$, $P(s)$ sînt coprime.
Avem atunci

TEOREMA 5.6. *Pentru sistemul (5.102), (5.103) cu $R(s)$, $P(s)$ nu în mod necesar coprime la dreapta, dar $P(s)$ coloană, proprie, se poate construi un estimator de lege de reacție de ordin minim (care nu este însă în mod obligatoriu stabil).*

Observația 5.13. Ordinul estimatorului de lege de reacție minimal se determină constructiv, neexistînd un rezultat de tipul relațiilor (5.127) sau (5.133), ca în cazul estimatorului de stare.

Observația 5.14. Analog observației 5.11, (5.140) nu are poli ficși, ceea ce explică posibilitatea construcției unui estimator de lege de reacție stabil, dar nu în mod obligatoriu minimal. Mai precis, se poate construi întotdeauna un estimator de lege de reacție stabil de ordin $m(\nu - 1)$, unde ν este indicele de observabilitate al sistemului (5.106), (5.107) (vezi teorema 3.2), acest estimator însă nefiind în mod obligatoriu și minimal. Neconcordanța între stabilitate și minimalitate în cazul estimatorilor de lege de reacție este legată și de faptul că *nu este cunoscut pînă în prezent un rezultat asupra polilor ficși (externi) ai soluțiilor minimale ale sintezei exacte*, decît în cazuri particulare cum este cazul estimatorilor de stare pentru care, așa cum s-a văzut, soluția minimală a lui (5.116) este și alocabilă.

5.5. SINTEZA EXACTĂ ÎN CIRCUIT ÎNCHIS

Introducem pentru început două definiții care vor preciza o bună parte din cadrul definitoriu necesar abordării problematicii sintezei exacte.

Fie din nou sistemul (5.102), (5.103)

$$P(s)\,z(s) = u(s) \tag{5.146}$$

$$y(s) = R(s)\,z(s) \tag{5.147}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $R(s)$, $P(s)$ sînt coprime la dreapta cu $P(s)$ coloană proprie, avînd $p \times m$ matricea de transfer (proprie)

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s) \tag{5.148}$$

şi unde evident

$$\partial_c[R(s)] \leqslant \partial_c[P(s)]. \tag{5.149}$$

Presupunînd $d_i \triangleq \partial_{ci}[P(s)] \geqslant 1$, $i = 1,2,\ldots,m$, unde $n \triangleq d_1 + \ldots + d_m$, starea $x(s) \in \mathbb{R}^n(s)$ a sistemului (5.146), (5.147) este dată de

$$x(s) = S(s)z(s) \tag{5.150}$$

unde evident

$$\partial_c[S(s)] < \partial_c[P(s)] \tag{5.151}$$

Introducem

DEFINIŢIA 5.5. Se numeşte compensator prin reacţie după stare al sistemului (5.146), (5.147), sistemul

$$P_a(s)\, z_a(s) = Q_a(s)\, x(s) + L_a(s)\, v(s) \tag{5.152}$$

$$u(s) = z_a(s) \tag{5.153}$$

cu $z_a(s) \in \mathbb{R}^m(s)$, $v(s) \in \mathbb{R}^q(s)$ şi $x(s)$ dat de (5.150), satisfăcînd condiţiile

(i) $P_a^{-1}(s)\,[Q_a(s) \;\vdots\; L_a(s)]$ proprie

(ii) $P_a^{-1}(s)$ proprie.

Avem atunci schema din figura 5.1

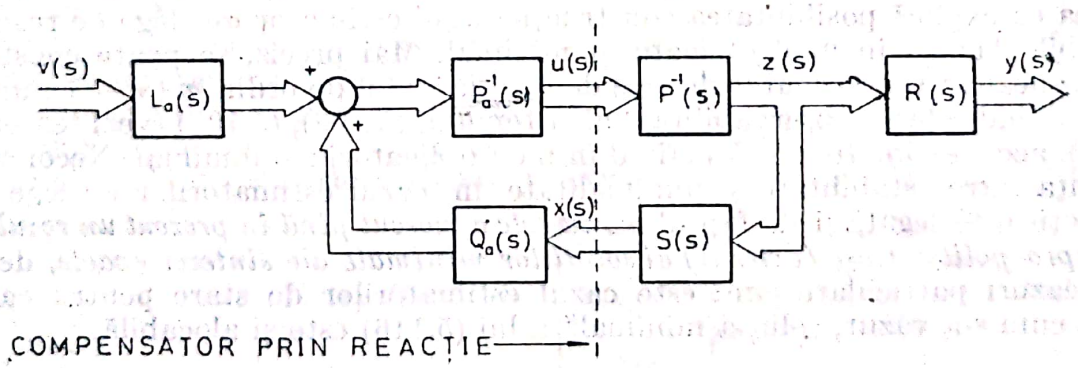


Fig. 5.1

Din figura 5.1 rezultă (scriind ecuaţiile faţă de sumator)

$$(P_a(s)\, P(s) - Q_a(s)S(s))\, P^{-1}(s)\, u(s) = L_a(s)\, v(s). \tag{5.154}$$

Notăm

$$T_0(s) \triangleq I_m - P_a^{-1}(s)\, Q_a(s)\, S(s)\, P^{-1}(s) \tag{5.155}$$

unde, conform cu (5.151) și condiția (i), $P_a^{-1}(s)Q_a(s)S(s)P^{-1}(s)$ este strict proprie și deci (vezi teorema 11 din anexa A2) $T_0(s)$ este proprie cu partea întreagă I_m avînd inversa $T_0^{-1}(s)$, de asemenea proprie cu partea întreagă I_m (vezi corolarul 16 din anexa A2). Se poate scrie atunci din (5.154)

$$u(s) = T_0^{-1}(s)\, P_a^{-1}(s)\, L_a(s)\, v(s) =$$

$$= P(s)\,(P_a(s)\,P(s) - Q_a(s)\,S(s))^{-1} L_a(s) v(s). \tag{5.156}$$

Din prima egalitate a lui (5.156) și condiția (i) se vede că

$$T_a(s) \triangleq P(s)\,(P_a(s)\,P(s) - Q_a(s)\,S(s))^{-1} L_a(s) \tag{5.157}$$

este proprie, definind $m \times q$ matricea de transfer de la $v(s)$ *la* $u(s)$ prin intermediul reacției după starea $x(s)$.

Se poate acum introduce

DEFINIȚIA 5.6. Fie $T_c(s)$ o $m \times q$ matrice de transfer. Vom spune că compensatorul prin reacție după stare $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ introdus prin definiția 5.5, este o realizare prin reacție după stare a lui $T_a(s)$ (în raport cu sistemul (5.146), (5.147)) de ordin $n_a \triangleq \partial[|P_a(s)|]$, dacă

$$T_a(s) = T_c(s) \tag{5.158}$$

cu $T_a(s)$ introdus prin (5.157). Zerourile lui

$$P_c(s) \triangleq P_a(s)\,P(s) - Q_a(s)\,S(s) \tag{5.159}$$

se numesc polii realizării, realizarea fiind stabilă dacă polii acesteia sînt în $\mathbb{C}^-$.

Se obișnuiește să se mai spună că n_a *este dimensiunea extensiunii* $P_a(s)$ a sistemului inițial (5.146), (5.147), iar sistemul rezultant din figura 5.1, compus din sistemul inițial și compensator, definește *o extensiune* (sau dinamică internă) *în combinație cu o lege de comandă, polii sistemului rezultant fiind polii realizării*, după cum rezultă din (5.159).

Observația 5.15. Fie $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$. Explicitînd membrul stîng a lui (5.158) în funcție de (5.157) și ținînd cont de (5.159), rezultă

$$P_c^{-1}(s)\, L_a(s) = P^{-1}(s)\, T_c(s) \tag{5.160}$$

adică realizarea de mai sus definește o factorizare la stînga a matricii raționale $P^{-1}(s)\, T_c(s)$. Așadar, polii realizării conțin polii matricii raționale $P^{-1}(s)\, T_c(s)$ (adică polii nesimplificabili, vezi definiția 19 din anexa A2), rezultînd că *o condiție necesară ca realizarea să fie stabilă este ca polii lui* $P^{-1}(s)\, T_c(s)$ *să fie stabili.*

Observația 5.16. Fie $(P_a(s), Q_a(s), L(s))$ o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$. Atunci $P(s)\, P_c^{-1}(s)$ cu $P_c(s)$ definit prin (5.159) este proprie. Într-adevăr, ținînd cont de (5.155) și (5.159) avem

$$P(s)\, P_c^{-1}(s) = T_0^{-1}(s)\, P_a^{-1}(s) \tag{5.161}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde se vede că membrul drept este o matrice rațională proprie. Atunci (vezi corolarul 15 din anexa A2) $P_c(s)P^{-1}(s)$ se poate exprima unic ca o sumă dintre cîtul ei și partea strict proprie, adică

$$P_c(s)P^{-1}(s) = G_a(s) - F_a(s)\,P^{-1}(s) \tag{5.162}$$

unde $G_a(s)$ este nesingulară cu $G_a^{-1}(s)$ proprie, iar

$$\partial_c[F_a(s)] < \partial_c[P(s)]. \tag{5.163}$$

Rezultă din (5.163) că se poate scrie

$$F_a(s) = F_a S(s) \tag{5.164}$$

unde F_a este o $m \times n$ matrice constantă. Atunci $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ *este o realizare prin reacție după stare a lui* $T_c(s)$ *de același ordin cu* $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$. Într-adevăr, întrucît $G_a^{-1}(s)$ este proprie, condiția (ii) din definiția 5.5 este îndeplinită. Pentru verificarea condiției (i) observăm că $G_a^{-1}(s)\,F_a$ este proprie. În fine, din (5.162) și (5.160) avem

$$\begin{aligned} G_a^{-1}(s)L_a(s) &= G_a^{-1}(s)\,P_c(s)\,P_c^{-1}(s)\,L_a(s) = \\ &= (P(s) - G_a^{-1}(s)\,F_a(s))\,P^{-1}(s)\,T_c(s) = \\ &= (I_m - G_a^{-1}(s)\,F_a(s)P^{-1}(s))T_c(s) \end{aligned} \tag{5.165}$$

unde, datorită lui (5.163), $G_a^{-1}(s)F_a(s)P^{-1}(s)$ este strict proprie și deci $I_m - G_a^{-1}(s)\,F_a(s)\,P^{-1}(s)$ este proprie, rezultînd $G_a^{-1}(s)L_a(s)$ proprie și în consecință condiția (i) este complet verificată. Așadar, $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ este un compensator prin reacție după stare unde din (5.159), (5.160), (5.162) și (5.164) rezultă banal satisfacerea condiției (5.158) și deci faptul că acest compensator este o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$. Din (5.161) și (5.161) avem

$$P_a(s)T_0(s) = G_a(s) - F_a(s)P^{-1}(s) \tag{5.166}$$

de unde rezultă că $P_a^{-1}(s)\,G_a(s) \to I_m$ cu $s \to \infty$ adică (vezi corolarul 16 din anexa A2)

$$\partial[\,|G_a(s)|\,] = \partial[\,|P_a(s)|\,] = n_a \tag{5.167}$$

adică $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ și $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ sînt două realizări de același ordin. În fine, din (5.162) rezultă (vezi demonstrația corolarului 16 din anexa A2) că

$$\partial[\,|P_c(s)|\,] = \partial[\,|G_a(s)|\,] + \partial[\,|P(s)|\,] \tag{5.168}$$

iar din (5.160)

$$\partial[\,|P_c(s)|\,] \geq \delta[P^{-1}(s)T_c(s)] \triangleq \delta_c \tag{5.169}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\delta\,[\ \ ]$ este gradul McMillan al matricii raționale proprii $P^{-1}(s)T_c(s)$ (deci ordinul ei). În consecință, avem din (5.167), (5.168) și (5.169) inegalitatea

$$n_a \geqslant \delta_c - n \tag{5.170}$$

($n = \partial\,[|P(s)|]$), care fixează *un minorant al ordinului oricărei realizări prin reacție, după stare*. Folosind realizarea $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ în locul lui $P_a(s)$, $Q_a(s)$, $L_a(s)$), schema din figura 5.1 devine schema din figura 5.2

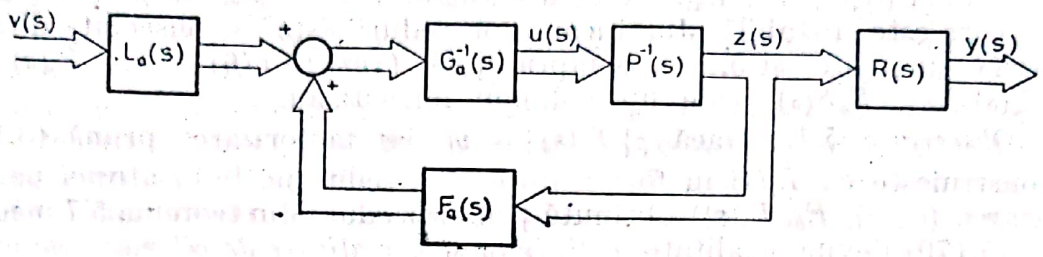


Fig. 5.2

unde se vede că datorită lui (5.163) și (5.164) reacția după starea $x(s)$ se poate realiza direct după starea parțială $z(s)$. Această ultimă constatare distinge din punctul de vedere al implementării efective cele două scheme și anume: schema din figura 5.1 se va implementa întotdeauna cu un estimator de stare, în timp ce schema din figura 5.2. se poate implementa și cu un estimator de lege de reacție $(F_a(s)\,z(s))$. Menționăm că echivalența dintre schemele din figura 5.1 și 5.2 evidențiată mai sus va fi esențială în abordarea care urmează.

Trecem acum la construcția efectivă a realizărilor prin reacție după stare (în raport cu un sistem dat.)

Avem

TEOREMA 5.7. *Fie $T_c(s)$ o $m \times q$ matrice de transfer pentru care polii matricii raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ sînt stabili. Se poate construi atunci o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$, care este stabilă.*

Demonstrație. Aplicăm următorul algoritm (Wolovich):

1. Se construiește o factorizare primă la stînga a lui $P^{-1}(s)\,T_c(s)$, adică

$$P^{-1}(s)T_c(s) = \bar{P}_c^{-1}(s)\,\bar{L}_c(s) \tag{5.171}$$

zerourile lui $\bar{P}_c(s)$ fiind evident în $\mathbb{C}^-$.

2. Dacă $P(s)\bar{P}_c^{-1}(s)$ este proprie punem

$$P_c(s) = \bar{P}_c(s) \tag{5.172}$$

$$L_a(s) = \bar{L}_c(s). \tag{5.173}$$

Dacă nu, fie $\Lambda(s)$ o matrice diagonală polinomială cu gradele polinoamelor alese atît cît este necesar ca $P(s)\bar{P}_c^{-1}(s)\,\Lambda^{-1}(s)$ să fie proprie, zerourile acestor polinoame plasîndu-se arbitrar în $\mathbb{C}^-$. Punem

$$P_c(s) = \Lambda(s)\bar{P}_c(s) \tag{5.174}$$

$$L_a(s) = \Lambda(s)\bar{L}_c(s) \tag{5.175}$$

unde, evident, $P_c^{-1}(s)L_a(s) = P^{-1}(s)T_c(s)$, adică o relație similară lui (5.160).

Scanned with OKEN Scanner

3. Întrucît $P(s)P_c^{-1}(s)$ este proprie, $P_c(s)P^{-1}(s)$ se poate exprima unic prin suma dintre partea întreagă şi cea strict proprie, adică

$$P_c(s)P^{-1}(s) = G_a(s) - F_a(s)P^{-1}(s), \tag{5.176}$$

deci o relaţie similară cu (5.162), unde $G_a(s)$ este nesingulară şi unde inegalitatea (5.163) este adevărată, ceea ce permite exprimarea lui $F_a(s)$ în forma (5.164), adică $F_a(s) = F_a S(s)$.

Atunci $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ este o realizare prin reacţie după stare a lui $T_c(s)$, care este şi stabilă. Justificarea procedurii este o consecinţă directă a observaţiilor 5.15 şi 5.16 şi a faptului că (vezi (5.176)) $|\Lambda(s)\bar{P}_c(s)| = |G_a(s)P(s) - F_a S(s)|$ este un polinom hurwitzian.

Observaţia 5.17. Dacă $\rho[T(s)] = m$, iar factorizarea primă (5.171) se construieşte cu $\bar{L}_c(s)$ în forma de eşalon redus pe linii, atunci pentru realizarea $(G_a(s), F_a, L_a(s))$ obţinută prin procedura din teorema 5.7 inegalitatea (5.170) devine egalitate, *obţinîndu-se o realizare de cel mai mic ordin posibil.* Într-adevăr, fie H_L o $q \times m$ matrice de permutare pentru care $\bar{L}_c(s)H_L$ este nesingulară, superior tiunghiulară la dreapta şi coloană proprie (lucru posibil, deoarece $\bar{L}_c(s)$ este în forma de eşalon redus pe coloane). Atunci $\bar{L}_c^D(s) \triangleq H_L(\bar{L}_c(s)H_L)^{-1}$ este o inversă la dreapta proprie a lui $\bar{L}_c(s)$, rezultînd din (5.171) că avem unic $P(s)\bar{P}_c^{-1}(s) = T_c(s)\bar{L}_c^D(s)$, adică $P(s)\bar{P}_c^{-1}(s)$ este proprie. În consecinţă, cu (5.172), (5.176) se scrie

$$\bar{P}_c(s) = G_a(s)P(s) - F_a(s) \tag{5.177}$$

de unde (vezi (5.163)) rezultă

$$\partial[|\bar{P}_c(s)|] = \partial[|G_a(s)|] + \partial[|P(s)|]. \tag{5.178}$$

Întrucît (5.171) este o factorizare primă $\delta_c = \partial[|\bar{P}_c(s)|]$, cu δ_c definit prin (5.169), rezultînd din (5.178) egalitatea

$$n_a = \delta_c - n \tag{5.179}$$

şi comparînd cu (5.170) observaţia este complet justificată.

De remarcat că procedura din teorema 5.7 conduce la schema din figura 5.2.

TEOREMA 5.8. *Pentru orice $m \times q$ matrice de transfer $T_c(s)$ se poate construi o realizare prin reacţie după stare a acesteia, $(\bar{P}_a(s), \bar{Q}_a(s), \bar{L}_a(s))$, de ordin minim $\bar{n}_a$.*

Demonstraţie. Aceasta se face aplicînd următorul algoritm

1. Se construieşte o factorizare la dreapta a lui $P^{-1}(s)\,T_c(s)$ adică

$$P^{-1}(s)\,T_c(s) = R_x(s)\,P_x^{-1}(s). \tag{5.180}$$

Atunci, înlocuind membrul drept al lui (5.160) cu (5.180) şi ţinînd cont de (5.159) obţinem

$$(P_a(s)P(s) - Q_a(s)\,S(s))^{-1}L_a(s) = R_x(s)\,P_x^{-1}(s) \tag{5.181}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, în definitiv

$$[\underbrace{P_a(s)}_{m} \vdots Q_a(s) \quad L_a(s)] \begin{bmatrix} P(s)R_x(s) \\ -S(s)R_x(s) \\ -P_x(s) \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.182)$$

2. Din (5.182) se determină prin procedura (duală) din teorema 5.2., soluția minimală proprie $\bar{P}_a^{-1}(s)\,[\bar{Q}_a(s)\ \bar{L}_a(s)]$. Aceasta revine la construirea unei baze (linie) minimale, reduse și ordonate a nucleului la stînga a lui $[R_x^T(s)P^T(s) \vdots -R_x^T(s)\,S^T(s) \vdots -P_x^T(s)]^T$, efectuîndu-se operațiile corespunzătoare de selecție cu referire la primele m coloane ale acestei baze.

Pentru ca pasul 2 să furnizeze efectiv o soluție minimală proprie este suficient (vezi teorema 5.2) să arătăm că (5.182) furnizează o soluție proprie. Într-adevăr, considerînd o factorizare oarecare la stînga a lui $T_c(s)$, $T_c(s) = \hat{P}_c^{-1}(s)\,\hat{L}_c(s)$, atunci $P_a(s) = \hat{P}_c(s)$, $Q_a(s) = 0$, $L_a(s) = \hat{L}_c(s)$ este o soluție proprie pentru (5.182), după cum imediat se poate verifica. În consecință, se poate construi soluția minimală proprie $\bar{P}_a^{-1}(s)\,[\bar{Q}_a(s)\ \bar{L}_a(s)]$, unde conform procedurii, $\bar{P}_a(s)$ rezultă linie proprie, adică $\bar{P}_a^{-1}(s)$ este proprie și în consecință condițiile (i) și (ii) din definiția 5.5 sînt îndeplinite.

Observația 5.18. Este clar că ordinul $\bar{n}_a$ al realizării minimale obținute prin teorema 5.8 satisface inegalitatea (5.170) adică $\bar{n}_a \geqslant \delta_c - n$. Dacă $\rho[T_c(s)] = m$, atunci conform observației 5.17 inegalitatea de mai sus devine egalitate, adică $\bar{n}_a = \delta_c - n$.

Observația 5.19. Dacă $(\bar{P}_a(s),\ \bar{Q}_a(s),\ \bar{L}_a(s))$ este o realizare minimală prin reacție după stare a lui $T_c(s)$ obținută prin procedura din teorema 5.8, iar $P^{-1}(s)T_c(s)$ are polii (nesimplificabili) stabili, atunci conform observației 5.15 și ținînd cont de observația 5.18 cei $\bar{n}_a + n$ poli ai realizării vor conține sigur δ_c poli stabili, restul de $\bar{n}_a + n - \delta_c$ poli fiind necontrolați, întrucît procedura menționată nu dă nici o informație directă asupra stabilității soluției minimale. Dacă $\rho[T_c(s)] = m$, atunci conform observației 5.18 procedura de mai sus va furniza sigur o realizare minimală stabilă.

Plecînd de la constatările din observația 5.19 vom arăta că dacă matricea rațională $P^{-1}(s)\,T_c(s)$ are polii stabili se poate construi totdeauna o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$, care este *minimală și stabilă*, acesta constituind unul din rezultatele centrale ale acestui paragraf.

TEOREMA 5.9. *Fie $T_c(s)$ o $m \times q$ matrice de transfer cu polii matricii raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ în $\mathbb{C}^-$. Atunci se poate construi o realizare prin reacție după stare, minimală și stabilă, a lui $T_c(s)$.*

Demonstrație. Aceasta se face aplicînd următorul algoritm :

1. Se construiește, conform procedurii din teorema 5.8 o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$, $(\bar{P}_a(s),\ \bar{Q}_a(s),\ \bar{L}_a(s))$, de ordin $\bar{n}_a = \partial[|\bar{P}_a(s)|]$ minim. Punem

$$P_c(s) \triangleq \bar{P}_a(s)P(s) - \bar{Q}_a(s)S(s) \qquad (5.183)$$

2. Se calculează un c.m.m.d.c. la stînga $\Delta(s)$ al lui $P_c(s)$ (definit prin (5.183)) și $\bar{L}_a(s)$ (vezi procedura din teorema 4, anexa A2) Dacă $\Delta(s)$ este o matrice unimodulară (întrucît $\Delta(s)$ rezultă în forma inferior triunghiulară la stînga aceasta revine la $\Delta(s) = I_m$), atunci $(\bar{P}_a(s),\ \bar{Q}_a(s),\ \bar{L}_a(s))$ este reali-

Scanned with OKEN Scanner

zarea căutată. Dacă nu, se elimină $\Delta(s)$ între $P_c(s)$ și $\bar{L}_a(s)$ rezultînd $\bar{P}_c(s)$ și respectiv $\bar{L}_c(s)$ adică

$$P_c(s) = \Delta(s)\bar{P}_c(s) \tag{5.184}$$

$$\bar{L}_a(s) = \Delta(s)\,\bar{L}_c(s). \tag{5.185}$$

3. Se construiește matricea unimodulară $U(s)$ care face

$$\bar{\Delta}(s) = \Delta(s)\,U(s) \tag{5.186}$$

coloană proprie și se calculează $\bar{\Delta}(s)$. Se determină matricea $\bar{\Phi}(s)$ cu

$$\partial_c[\bar{\Phi}(s)] < \partial_c[\bar{\Delta}(s)] \tag{5.187}$$

astfel încît zerourile lui $[\bar{\Delta}(s) - \bar{\Phi}(s)]$ să fie alocate arbitrar în $\mathbb{C}^-$ (vezi procedura de alocare din corolarul 2.5).

4. Se definesc

$$\tilde{P}_c(s) \triangleq (\bar{\Delta}(s) - \bar{\Phi}(s))\,U^{-1}(s)\bar{P}_c(s) \tag{5.189}$$

$$\tilde{L}_a(s) \triangleq (\bar{\Delta}(s) - \bar{\Phi}(s))\,U^{-1}(s)\,\bar{L}_c(s) \tag{5.190}$$

și se exprimă (lucru posibil, așa cum se va vedea) $\tilde{P}_c(s)\,P^{-1}(s)$ ca o sumă dintre partea întreagă și partea strict proprie, adică

$$\tilde{P}_c(s)P^{-1}(s) = \tilde{G}_a(s) - \tilde{F}_a(s)\,P^{-1}(s). \tag{5.191}$$

Atunci $(\tilde{G}_a(s), \tilde{F}_a, \tilde{L}_a(s))$ este realizarea căutată, unde $\tilde{F}_a(s) = \tilde{F}_a S(s)$.

Într-adevăr. Dacă $\Delta(s)$ este o matrice unimodulară, atunci ținînd cont de observația 5.15, $(\bar{P}_a(s)P(s) - \bar{Q}_a(s)S(s))^{-1}\,\bar{L}_a(s)$ definește o factorizare primă la stînga a lui $P^{-1}(s)T_c(s)$ și în consecință, zerourile lui $|\bar{P}_a(s)P(s) - \bar{Q}_a(s)S(s)|$ sînt chiar polii (stabili) ai matricii raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$. În cazul în care $\Delta(s)$ nu este unimodulară să observăm că $P(s)\tilde{P}_c^{-1}(s)$ este proprie. Pentru aceasta avem din (5.183), (5.184) și (5.189)

$$P(s)\tilde{P}_c^{-1}(s) = P(s)\,\bar{P}_c^{-1}(s)\,U(s)\,\Delta^{-1}(s)\,(I_m - \bar{\Phi}(s)\,\bar{\Delta}^{-1}(s))^{-1} = \tag{5.192}$$

$$= P(s)P_c^{-1}(s)(I_m - \bar{\Phi}(s)\bar{\Delta}^{-1}(s))^{-1} = \bar{T}_0^{-1}(s)\bar{P}_a^{-1}(s)\bar{T}_\Delta^{-1}(s)$$

unde

$$\bar{T}_0(s) \triangleq I_m - \bar{P}_a^{-1}(s)\,\bar{Q}_a(s)\,S(s)\,P^{-1}(s) \tag{5.193}$$

$$\bar{T}_\Delta(s) \triangleq I_m - \bar{\Phi}(s)\,\bar{\Delta}^{-1}(s) \tag{5.194}$$

și unde (vezi (5.155) și (5.187)) $\bar{T}_0(s)$, $\bar{T}_\Delta(s)$ sînt proprii cu partea întreagă I_m. Rezultă atunci din ultima egalitate a lui (5.192) că $P(s)\,\tilde{P}_c^{-1}(s)$ este

Scanned with OKEN Scanner

proprie, ceea ce permite exprimarea unică din membrul drept a lui (5.191). Întrucît din (5.184), (5.185), (5.189) şi (5.190) avem

$$\tilde{P}_c^{-1}(s)\,\tilde{L}_a(s) = P_c^{-1}(s)\bar{L}_a(s) \tag{5.195}$$

cu $P_c(s)$ dat de (5.183), rezultă conform observaţiei 5.15 că $\tilde{P}_c^{-1}(s)\tilde{L}_a(s)$ este o factorizare la stînga a lui $P^{-1}(s)T_c(s)$ şi în consecinţă, conform cu (5.191) şi observaţia 5.16, $(\tilde{G}_a(s), \tilde{F}_a, \tilde{L}_a(s))$ este o realizare prin reacţie după stare a lui $T_c(s)$. Să arătăm în final că această realizare este de acelaşi ordin cu realizarea de ordin minim $(\bar{P}_a(s), \bar{Q}_a(s), \bar{L}_a(s))$. Pentru aceasta, avem din (5.192)

$$\tilde{P}_c(s)\,P^{-1}(s) = \bar{T}_\Delta(s)P_a(s)\bar{T}_0(s). \tag{5.196}$$

Întrucît $\bar{T}_0^{-1}(s)\bar{P}_a^{-1}(s)$ este proprie, $\bar{P}_a(s)\bar{T}_0(s)$ se exprimă unic ca suma dintre cît şi partea strict proprie, adică

$$\bar{P}_a(s)\,\bar{T}_0(s) = \bar{P}_{a1}(s) + \bar{T}_{01}(s) \tag{5.197}$$

unde $\bar{P}_{a1}(s)$ este nesingulară cu $\bar{P}_{a1}^{-1}(s)$ proprie iar $\bar{T}_{01}(s)$ este strict proprie. Rezultă imediat din (5.197) (vezi şi (5.193)) că $\bar{P}_a^{-1}(s)\bar{P}_{a1}(s) \to I_m$ cu $s \to \infty$ şi deci

$$\partial[\,|\bar{P}_a(s)|\,] = \partial[\,|\bar{P}_{a1}(s)|\,]. \tag{5.198}$$

Întrucît $\bar{P}_a^{-1}(s)\,\bar{T}_{\Delta 1}^{-1}(s)$ este proprie, avem exprimarea unică similară lui (5.197)

$$\bar{T}_\Delta(s)\,\bar{P}_{a1}(s) = \bar{P}_{a2}(s) + \bar{T}_{\Delta 1}(s) \tag{5.199}$$

unde $\bar{P}_{a2}(s)$ este nesingulară cu $\bar{P}_{a2}^{-1}(s)$ proprie, iar $\bar{T}_{\Delta 1}(s)$ este strict proprie. În mod analog ca mai sus

$$\partial[\,|\,\bar{P}_{a1}(s)\,|\,] = \partial[\,|\,\bar{P}_{a2}(s)\,|\,] \tag{5.200}$$

Atunci din (5.197) şi (5.199) avem:

$$\bar{T}_\Delta(s)P_a(s)\,\bar{T}_0(s) = \bar{P}_{a2}(s) + (\bar{T}_\Delta(s)\bar{T}_{01}(s) + \bar{T}_{\Delta 1}(s)) \tag{5.201}$$

unde în membrul drept al lui (5.201) expresia din paranteze este strict proprie. În consecinţă, din (5.191), (5.196) şi (5.201) rezultă, ţinînd cont de unicitatea exprimărilor ca sumă dintre partea întreagă şi cea strict proprie, că

$$\bar{P}_{a2}(s) = \tilde{G}_a(s) \tag{5.202}$$

de unde, în definitiv, din (5.198) şi (5.200) rezultă

$$\partial[\,|\bar{P}_a(s)|\,] = \partial[\,|\tilde{G}_a(s)|\,] \tag{5.203}$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitatea care arată că $(\widetilde{G}_a(s), \widetilde{F}_a, \widetilde{L}_a(s))$ este o realizare de ordin minim. Întrucît din (5.184), (5.185) și (5.195) avem că $\bar{P}_c^{-1}(s)\,\bar{L}_c(s)$ este o factorizare primă la stînga a lui $P^{-1}(s)T_c(s)$, rezultă direct din (5.189) și (5.191) că realizarea obținută este și stabilă. Se vede din (5.191) că polii acestei realizări se compun din zerourile lui $\bar{P}_c(s)$, adică polii (stabili) ai matricii raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ și zerourile lui $\bar{\Delta}(s) - \bar{\Phi}(s)$ alocate arbitrar în $\mathbb{C}^-$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Se poate introduce acum

DEFINIȚIA 5.7. Fie $T_a(s)$ o $p \times q$ matrice de transfer. Vom spune că compensatorul prin reacție după stare $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ introdus prin definiția 5.5, este o soluție a sintezei exacte în circuit închis a lui $T_a(s)$ (din sistemul (5.146), (5.147)) de ordin $n_a \triangleq \partial\,[|P_a(s))|]$, dacă

$$T(s)T_a(s) = T_a(s) \tag{5.204}$$

cu $T_a(s)$ introdus prin (5.157). Zerourile lui (5.159) se numesc polii sintezei exacte în circuit închis, sinteza fiind stabilă dacă polii acesteia se găsesc în $\mathbb{C}^-$.

Avem imediat

TEOREMA 5.10. *Sinteza exactă în circuit închis are o soluție dacă și numai dacă sinteza exactă prin compensare serie (5.1) are o soluție.*

Demonstrație. Dacă (5.1) are o soluție (proprie) $T_c(s)$, atunci fie $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$. Rezultă imediat, ținînd cont de (5.158), că (5.204) este satisfăcută cu $T_a(s)$ dat de (5.157), realizarea de mai sus fiind o soluție a sintezei exacte în circuit închis. Reciproc. Dacă sinteza exactă în circuit închis are o soluție $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$, atunci $T_c(s) \triangleq T_a(s)$, cu $T_a(s)$ dat de (5.157), este un compensator serie care satisface (5.1).

Observația 5.20. Prima parte a demonstrației de mai sus arată că o problemă de sinteză exactă în circuit închis poate fi soluționată prin rezolvarea ei în circuit deschis urmată de implementarea în circuit închis a soluției obținute, ceea ce revine la calculul unei realizări prin reacție după stare a soluției în circuit deschis. Schema de implementare în circuit închis este cea din figura 5.1, respectiv figura 5.2, obișnuindu-se să se spună că sinteza exactă a fost soluționată prin extensiune (dinamică internă) în combinație cu o lege de comandă adică $P_a^{-1}(s)\,[Q_a(s) \vdots L_a(s)]$ sau respectiv $G_a^{-1}(s)\,[F_a \vdots L_a(s)]$.

COROLARUL 5.5. Dacă polii ficși interni ai sintezei exacte sînt stabili, atunci sinteza exactă în circuit închis are o soluție stabilă. Într-adevăr, se poate construi atunci o soluție (proprie) $T_c(s) = T_{c0}(s)$ a lui (5.1) (vezi (5.16) unde zerourile lui $\bar{D}(s)$ au fost alocate în $\mathbb{C}^-$, precum și teorema 5.3) pentru care polii matricii raționali $P^{-1}(s)T_c(s)$ sînt plasați în $\mathbb{C}^-$. Aplicînd procedura din teorema 5.9 se obține rezultatul dorit. Cu referire la rezultatul de minimalitate evidențiat de teorema 5.9 se spune că *soluția în circuit deschis* („afară") *a fost introdusă minimal și stabil în circuit închis* („înăuntru").

Observația 5.21. Referitor la ultima remarcă din corolarul 5.5 trebuie precizat că „minimalitatea" introducerii unei soluții „înăuntru", obținută „afară", nu înseamnă minimalitatea sintezei exacte în circuit închis (n_a din

definiția 5.7, minim), aceasta întrucît ecuația (5.1) are o clasă de soluții $T_c(s)$ (vezi (5.7) sau (5.9)) și în consecință este vorba de a realiza $n_a =$ minim, cu n_a din definiția 5.6, nu în raport cu un $T_c(s)$ oarecare, ci în raport cu întreaga clasă $T_c(s)$. Un astfel de minim, deși evident există, nu a fost realizat constructiv pînă în prezent, decît într-un singur caz exprimat de

TEOREMA 5.11. *Dacă* $\rho[T(s)] = m$ *și ecuația (5.1) are o soluție proprie* $T_c(s)$ *(cu polii matricii raționale* $P^{-1}(s)$ $T_c(s)$ *în* $\mathbb{C}^-$*) atunci se poate construi o soluție a sintezei exacte în circuit închis care este minimală (și stabilă).*

Demonstrație. Întrucît $T(s)$ este inversabilă la stînga, soluția (proprie) $T_c(s)$ este unică. Construind o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$, $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$, care este *minimală* (și stabilă) obținem soluția căutată. Într-adevăr, dacă ar exista o altă soluție în circuit închis a sintezei exacte, să zicem $(\widetilde{P}_a(s), \widetilde{Q}_a(s), \widetilde{L}_a(s))$, cu $\tilde{n}_a (\triangleq \partial[|\widetilde{P}_a(s)|]) < n_a$, atunci fie $\widetilde{T}_a(s) \triangleq P(s)\,(\widetilde{P}_a(s)P(s) - \widetilde{Q}_a(s)\,S(s))^{-1}\,L_a(s)$ care evident satisface ecuația $T(s)\,\widetilde{T}_a(s) = T_d(s)$. În consecință, datorită unicității $\widetilde{T}_a(s) = T_c(s)$, rezultînd că $(\widetilde{P}_a(s), \widetilde{Q}_a(s), \widetilde{L}_a(s))$ este o realizare prin reacție după stare a lui $T_c(s)$ de ordin strict mai mic decît $(P_a(s), Q_a(s), L_a(s))$ ceea ce este absurd.

Observația 5.22. Din punct de vedere practic prin rezolvarea unei probleme de sinteză exactă vom înțelege rezolvarea ei în circuit închis uzînd de tot arsenalul formal și constructiv al acestui capitol. În acest sens se expune mai jos

Algoritmul general de rezolvare al problemei sintezei exacte

Datele de intrare sînt

1. *Sistemul* dat printr-o factorizare primă la dreapta a $p \times m$ matricii de transfer

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s)$$

cu $P(s)$ coloană proprie.

2. *Modelul* dat printr-o factorizare primă la dreapta a $p \times q$ matricii de transfer

$$T_d(s) = R_d(s)P_d^{-1}(s)$$

Datele de ieșire sînt :

1. Verifică dacă ecuația

$$T(s)\,T_c(s) = T_d(s)$$

are o soluție rațională. În caz afirmativ, verifică dacă ecuația are o soluție proprie. Dacă da, furnizează această soluție.

2. Modifică eventual $T_d(s)$ astfel încît polii ficși interni să fie stabili (sau impuși în $\mathbb{C}^-$).

3. Furnizează soluția proprie $T_c(s)$ cu polii matricii raționale $P^{-1}(s)$ $T_c(s)$ în $\mathbb{C}^-$ (polii neficși fiind arbitrar alocați în $\mathbb{C}^-$).

Pașii algoritmului sînt :

Pasul 0. Se formează masivul

$$A_0(s) = \left|\begin{array}{c|c|c} I_p & R(s) & R_d(s) \\ \hline & P(s) & \\ \hline & I_m & \end{array}\right|$$

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 1. Prin operaţii elementare asupra coloanelor lui $A_0(s)$ se aduce $R(s)$ la forma de eşalon redus pe coloane, rezultînd :

$$A_1(s) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{}^{r} & & \overbrace{}^{m-r} & \\ I_p & R_a(s) & 0 & R_d(s) \\ \hline & P_a(s) & \bar{P}_1(s) & \end{array}\right]\begin{matrix}\}\, m \\ \}\, m\end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} & U_a(s) & \bar{U}_1(s) & \end{array}\right]$$

Pasul 2. Prin operaţii elementare asupra coloanelor lui $A_1(s)$ se aduce $\bar{P}_1(s)$ la forma coloană proprie, rezultînd

$$A_2(s) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_p & R_a(s) & 0 & R_d(s) \\ \hline & P_a(s) & \bar{P}(s) & \\ \hline & U_a(s) & \bar{U}(s) & \end{array}\right]$$

Pasul 3. Prin operaţii elementare asupra liniilor lui $A_2(s)$ se aduce $R_a(s)$ la forma de eşalon redus pe linii, rezultînd

$$A_3(s) = \begin{matrix} \overbrace{}^{r} & \overbrace{}^{m-r} & \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} L_a(s) & X_a(s) & 0 & X_d(s) \\ \hline L_b(s) & 0 & 0 & Y_d(s) \\ \hline & P_a(s) & \bar{P}(s) & \\ \hline & U_a(s) & \bar{U}(s) & \end{array}\right] \end{matrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, p-r \end{matrix}$$

Dacă $Y_d(s) = 0$, ecuaţia $T(s)T_c(s) = T_d(s)$ are o soluţie raţională şi se trece la pasul 4. Dacă nu, STOP.

Pasul 4. Se construieşte $m \times m$ matricea de permutare

$$S = \begin{bmatrix} S_a \\ \bar{S} \end{bmatrix}\begin{matrix}\}\, r \\ \}\, m-r\end{matrix}$$

astfel încît $\bar{S}\bar{P}(s)$ este nesingulară cu $\partial_c[\bar{P}(s)] = \partial_c[\bar{S}\bar{P}(s)]$, ceea ce revine la selectarea din $\Gamma_c[\bar{P}(s)]$ a $m-r$ linii liniar independente $\bar{S}\,\Gamma_c[P(s)]$ (cu menţinerea ordonării relative) şi unde $S_a\Gamma_c[\bar{P}(s)]$ sînt restul liniilor din $\Gamma_c[\bar{P}(s)]$ (cu menţinerea ordonării relative).

Pasul 5. Se calculează $(m-r) \times (m-r)$ matricea polinomială $\bar{\bar{F}}(s)$ cu $\partial_c[\bar{\bar{F}}(s)] < \partial_c[\bar{S}\bar{P}(s)]$ astfel încît zerourile polinomului $|\bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s)|$ să fie alocate în $\mathbb{C}^-$, şi $(m-r) \times r$ matricea polinomială $\bar{F}_a(s)$ ca fiind cîtul lui $\bar{\bar{F}}(s)\,(\bar{S}\bar{P}(s))^{-1}\,\bar{S}P_a(s)$. Se calculează matricile polinomiale

$$\bar{D}(s) \triangleq \bar{S}\bar{P}(s) - \bar{\bar{F}}(s) \quad \text{şi} \quad D_a(s) \triangleq \bar{S}\,P_a(s) - \bar{F}_a(s).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pasul 6. Se calculează :

$$T_{c0}(s) = (P_a(s) - \bar{P}(s)\,\bar{D}^{-1}(s)\,D_a(s))X_a^{-1}(s)\,X_d(s)\,P_d^{-1}(s).$$

Dacă $T_{c0}(s)$ este proprie, clasa soluţiilor proprii este :

$$T_c(s) = T_{c0}(s) + \bar{P}(s)\,\bar{D}^{-1}(s)\,\bar{V}(s)$$

pentru toate $(m-r) \times q$ matricile raţionale proprii $\bar{V}(s)$.
Dacă $T_{c0}(s)$ nu este proprie (de fapt este suficient ca $S_a T_{c0}(s)$ să nu fie proprie) atunci nu există soluţii proprii.

Pasul 7. Se calculează un c.m.m.d.c. la stînga a lui $X_a(s)$ şi $X_d(s)$ şi se elimină, rezultînd :

$$X_a^{-1}(s)\,X_d(s) = \bar{X}_a^{-1}(s)\,\bar{X}_d(s)$$

cu $\bar{X}_a(s)$ şi $\bar{X}_d(s)$ coprime la stînga, unde $\bar{X}_a(s)$ rezultă în forma inferior triunghiulară la stînga. Dacă zerourile lui $\bar{X}_a(s)$ sînt toate în $\mathbb{C}^-$ (ceea ce rezultă din inspecţia diagonalei lui $\bar{X}_a(s)$), iar zerourile lui $P_d(s)$ sînt în $\mathbb{C}^-$ (ceea ce este de regulă adevărat), atunci se consideră soluţia obţinută la pasul 6. Dacă nu, se factorizează $\bar{X}_a(s)$ în

$$\bar{X}_a(s) = \bar{X}_a^+(s)\,\bar{X}_a^-(s)$$

unde zerourile lui $\bar{X}_a^+(s)$ sînt în $\mathbb{C}^+$, iar ale lui $\bar{X}_a^-(s)$ în $\mathbb{C}^-$(folosind de exemplu, aducerea la forma canonică Smith vezi teorema 3 din anexa A2) şi se alege o nouă $r \times q$ matrice polinomială $\bar{X}_d(s)$ de forma

$$\bar{X}_d(s) = \bar{X}_a^+(s)\tilde{X}_d(s)$$

unde $\tilde{X}_d(s)$ este arbitrară.

Pasul 8. Se alege o nouă $q \times q$ matrice $P_d(s)$ diagonală şi nesingulară, avînd zerourile în $\mathbb{C}^-$ şi gradele polinoamelor de pe diagonală atît cît este necesar ca

$$T_{c0}(s) = (P_a(s) - \bar{P}(s)\,\bar{D}^{-1}(s)\,D_a(s))(\bar{X}_a^-(s))^{-1}\tilde{X}_d(s)P_d^{-1}(s)$$

să fie proprie, $T_{c0}(s)$ fiind *noua soluţie*. Noul model modificat $T_d(s)$ rezultă calculînd $T(s)T_{c0}(s)$.

Soluţiile $T_{c0}(s)$ rezultate la pasul 6, dacă zerourile lui $\bar{X}_a(s)$ sînt în $\mathbb{C}^-$ (cele ale lui $P_d(s)$ fiind presupuse în mod firesc în $\mathbb{C}^-$) sau, respectiv la pasul 8, au polii interni (polii matricii raţionale $P^{-1}(s)T_{c0}(s)$) în $\mathbb{C}^-$.

Justificarea algoritmului este lăsată ca exerciţiu cititorului.

Bibliografie

5.1. W. A. Wolovich, *The use of state feedback for exact model matching.* SIAM JC, **10**, 512—523, Aug. (1972).
5.2. W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems.* Springer Verlag, New York 1974.
5.3. B. C. Moore, L. H. Silverman, *Model matching by state feedback and dynamic compensation.* IEEE Trans. **AC—17**, 491—497, Aug. (1972).

Scanned with OKEN Scanner

5.4. A. S. Morse, *Structure and design of linear model following systems.* IEEE Trans. AC—18 316—354, Aug. (1973).
5.5. H. Wang, E. J. Davison, *A minimization algorithm for the design of linear multivariable systems.* IEEE Trans. on AC—18, 2220—225, June (1973).
5.6. G. D. Forney, Jr, *Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems.* SIAM JC, **13**, 493—520, Aug. (1975).
5.7. M. K. Sain, *A free modular algorithm for minimal design of linear multivariable systems.* Proc. 6th trienal world cong. IFAC, paper 9.1, Boston, Aug. (1975).
5.8. A. S. Morse, *Minimal solutions to transfer matrix equations.* IEEE Trans. **AC-21**, 131—133, Feb. (1976).
5.9. W. A. Wolovich, P. Antsaklis, H. Elliot, *On the stability of solutions to minimal and nonminimal design problem.* IEEE Trans. **AC-22**, 89—94 Febr. (1977).
5.10. B. D. O. Anderson, R. W. Scot, *Parametric solutions of the stable esact model matching problem.* IEEE Trans. **AC—22**, 137—138, Febr. (1977).
5.11. W. A. Wolovich, P. L. Falb., *Invariants and canonical forms under dynamic compensation.* SIAM JC, **14**, 996—1008, Nov (1976).
5.12. W. A. Wolovich, *On the cancellation of multivariable system zeros by state feedback.* IEE Trans. **AC-19**, 276—277 (1974).
5.13. V. Ionescu C. Popeea, *On the stable closed loop solution to model matching problem.* Rev. roum. de sci. tech. serie el. et energ. *3*, **23** (1978).
5.13. V. Ionescu C. Popeea, *On the stable closed loop solutions to model matching problem.* Rev. roum. de sci. tech. serie el. et energ. *3*, **23** (1978).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 6

Decuplarea sistemelor liniare

Problema decuplării, formulată inițial în așa-numita variantă a *decuplării scalare* a fost intens cercetată în special sub aspectul soluționării ei prin utilizarea *reacției în funcție de stare*. Acest mod de abordare a generat o serie de complicații care nu și-au găsit pe deplin soluționarea nici pînă în prezent. Punctul de vedere adoptat în dezvoltările care urmează consideră problema decuplării, cel puțin într-o formulare și investigare inițială, ca o *problemă tipică de sinteză în circuit deschis*; în consecință problema decuplării va fi abordată în maniera sintezei exacte. Acest punct de vedere permite o soluționare completă a problemei decuplării, problema decuplării prin reacție fiind tratată ulterior ca o variantă cu restricții de structură a cazului general.

6.1. PROBLEMA DECUPLĂRII

Fie sistemul dat prin $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$ și fie întregii k, $p_1, \ldots, p_k$ cu $2 \leqslant k \leqslant p$, $p_1 + \ldots + p_k = p$ și $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$. *Problema decuplării* lui $T(s)$, prin compensare serie, constă în găsirea (dacă este posibil) unui compensator serie (în circuit deschis) avînd $m \times q$ matricea de transfer $T_c(s)$ astfel încît sistemul compensat să aibă $p \times q$ matricea de transfer $T_d(s) = T(s)T_c(s)$ *bloc diagonală și controlabilă la ieșire*, fiecare bloc fiind de dimensiune $p_i \times q_i$, $i = 1, \ldots, k$, unde q și q_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, cu $q_1 + \ldots + q_k = q$ *sînt inițial necunoscute și trebuie să rezulte prin rezolvarea problemei.*

Mai exact, fie $T(s)$ partiționată bloc linie

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

cu $T_i(s)$ $p_i \times m$. Fie compensatorul $T_c(s)$ partiționat *bloc coloană*

$$T_c(s) = [T_{c1}(s) \;\; T_{c2}(s) \ldots T_{ck}(s)] \tag{6.2}$$

cu $T_{ci}(s)$ $m \times q_i$. Atunci structura bloc diagonală a lui $T_d(s)$

$$T_d(s) = T(s)T_c(s) = \text{diag}\,(T_{di}(s)) \tag{6.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $T_{di}(s)$ $p_i \times q_i$ corespunde la

$$T_i(s)T_{cj}(s) = 0 \qquad (\forall)\ i \neq j \tag{6.4}$$

iar *controlabilitatea la ieşire a lui* $T_d(s)$ *revine la controlabilitatea la ieşire a fiecărui bloc*

$$T_{di}(s) = T_i(s)T_{ci}(s) \tag{6.5}$$

$i = 1, \ldots, k$ (şi reciproc).

Fie partiţiile corespunzătoare ale ieşirii

$$y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

şi respectiv ale noii intrări

$$v(s) = \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ \vdots \\ v_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

unde $y_i(s)$ şi $v_i(s)$ sînt $p_i \times 1$ şi respectiv $q_i \times 1$. Este clar că comportarea decuplată $y(s) = T_d(s)v(s)$ se exprimă prin $y_i(s) = T_{di}(s)v_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$ şi unde pachetul de intrări $v_i(s)$ „controlează" pachetul de ieşiri $y_i(s)$. De remarcat că în cazul *decuplării scalare* adică $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, k$, controlabilitatea la ieşire revine la $T_{di}(s) \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Introducem acum

DEFINIŢIA 6.1. $p \times m$ matricea de transfer $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieşire pentru k, q_i, $i = 1, \ldots, k$, date (sau pe scurt decuplabilă fără menţiunea expresă a lui k, şi q_i, acestea presupunîndu-se date apriori) dacă problema decuplării, enunţării mai sus, are o soluţie pentru specificaţiile k şi q_i, $i = 1, \ldots, k$.

Pentru a facilita rezolvarea problemei decuplării introducem

$$\tilde{T}_i(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_{i-1}(s) \\ T_{i+1}(s) \\ \vdots \\ T_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Atunci condiţiile (6.4) devin

$$\tilde{T}_i(s)T_{ci}(s) = 0,\ i = 1, \ldots, k \tag{6.9}$$

Prin urmare, dacă $T_c(s)$, dat de (6.2), decuplează $T(s)$ atunci $T_{ci}(s)$ nulează ieşirea lui $\tilde{T}_i(s)$. Această constatare conduce în particular la con-

Scanned with OKEN Scanner

siderarea nulorilor (proprii) $\tilde{N}_i(s)$ asociaţi fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$, $i = 1,\ldots k$ Avem atunci

TEOREMA 6.1. *Problema decuplării este rezolvabilă dacă şi numai dacă există nulorii $\tilde{N}_i(s)$ asociaţi fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$, $i = 1,\ldots, k$, astfel încît $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$, $i = 1,\ldots,k$ să fie controlabile la ieşire. În acest caz, o soluţie a problemei decuplării este*

$$T_c(s) = [\tilde{N}_1(s) \ldots \tilde{N}_k(s)] \tag{6.10}$$

unde $\tilde{N}_i(s)$ este orice nulor propriu a lui $\tilde{T}_i(s)$.

Demonstraţie. Pentru *suficienţă*, fie $\tilde{N}_i(s)$, $i = 1\ldots, k$ un set de k nulori astfel încît $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$ sînt controlabile la ieşire. Întrucît $\operatorname{Im} \tilde{N}_i(s) = \operatorname{Ker} \tilde{T}_i(s)$, pentru orice nulor $\tilde{N}_i(s)$, rezultă că în particular $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$ vor continua să fie controlabile la ieşire cu $\tilde{N}_i(s)$ aleşi proprii, iar (6.9) va fi satisfăcută pentru $T_{ci}(s) = \tilde{N}_i(s)$ (proprie). *Necesitatea* decurge din faptul că dacă există o soluţie (6.2) a problemei decuplării, atunci din (6.9) rezultă că $\operatorname{Im} T_{ci}(s) \subset \operatorname{Im} \tilde{N}_i(s)$, unde $\tilde{N}_i(s)$ sînt k nulori proprii asociaţi fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$ în consecinţă (6.10) va fi de asemenea o soluţie a problemei decuplării în sensul că $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$, $i = 1,\ldots,k$, vor fi sigur controlabile la ieşire.

Observaţia 6.1. Din demonstraţia de mai sus rezultă că faptul că $T(s)$ şi $T_c(s)$ sînt proprii nu condiţionează în nici un fel rezolvarea problemei decuplării.

Observaţia 6.2. În soluţia (6.10) $q_i = \pi_i \triangleq m - \tilde{r}_i$, unde $\tilde{r}_i \triangleq \rho[\tilde{T}_i(s)]$ adică $\pi_i = \rho[\tilde{N}_i(s)]$, $i = 1,\ldots, k$. Apare aşadar firesc să considerăm numai acele soluţii pentru care $q_i \leqslant \pi_i$. Mai exact, fie $\mathscr{C}_D$ clasa soluţiilor decuplării lui $T(s)$ (cu k şi p_i, $i = 1,\ldots,k$ fixaţi), iar $\mathscr{C}_N$ clasa matricilor proprii $T_c(s)$ de forma (6.2) unde $\operatorname{Im} T_{ci}(s) \subset \operatorname{Im} \tilde{N}_i(s) = \operatorname{Ker} \tilde{T}_i(s)$. Vom considera de la început că $\mathscr{C}_D \subset \mathscr{C}_N$. Fie de asemenea $\tilde{\mathscr{C}}_N$ clasa matricilor $T_c(s)$ de forma (6.10) unde $\tilde{N}_i(s)$ sînt nulori proprii asociaţi fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$. Conform teoremei 6.1. dacă $\mathscr{C}_D \neq \emptyset$, avem sigur $\tilde{\mathscr{C}}_N \subset \mathscr{C}_D$ adică în definitiv

$$\tilde{\mathscr{C}}_N \subset \mathscr{C}_D \subset \mathscr{C}_N \tag{6.11}$$

cu $\mathscr{C}_D \neq \emptyset$, relaţie care fixează cadrul clasei soluţiilor problemei decuplării (dacă această clasă nu este vidă). De observat că dimensiunile maximale q_i corespund clasei $\tilde{\mathscr{C}}_N$.

Observaţia 6.3. Pentru construcţia nulorilor $\tilde{N}_i(s)$ este comod ca $T(s)$ să fie factorizată în forma

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s) \tag{6.12}$$

iar $R(s)$ partiţionată adecvat în

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

astfel încît

$$T_i(s) = R_i(s)P^{-1}(s) \tag{6.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv

$$\tilde{T}_i(s) = \tilde{R}_i(s)P^{-1}(s) \tag{6.15}$$

unde

$$\tilde{R}_i(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_{i-1}(s) \\ R_{i+1}(s) \\ \vdots \\ R_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Observația 6.4. Dacă se consideră sistemul

$$P(s)z(s) = u(s) \tag{6.17}$$

$$y(s) = R(s)z(s) \tag{6.18}$$

asociat factorizării (6.12) cu $R(s)$ și $P(s)$ coprime la dreapta și $P(s)$ coloană proprie, și o soluție $T_c(s) \in \mathscr{C}_D$, atunci se pot aplica rezultatele din paragraful 5.5. în vederea implementării în circuit închis, a soluției $T_c(s)$.

6.2. CAZURI PARTICULARE ALE PROBLEMEI DECUPLĂRII

În cele ce urmează ne vom referi la cîteva cazuri particulare care rezultă în mod natural și care aduc unele simplificări în rezolvarea problemei decuplării.

Cazul $k = p$

Dacă $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire înseamnă că cele p linii ale lui $T_d(s)$, care este bloc diagonală și controlabilă la ieșire, sînt liniar independente și deci

$$\rho[T_d(s)] = p \tag{6.19}$$

adică $T_d(s)$ este inversabilă la dreapta. Atunci din inegalitatea lui Sylvester pentru $T(s)T_c(s) = T_d(s)$ rezultă $\rho[T(s)] \geqslant \rho[T_d(s)] = p$, adică

$$\rho[T(s)] = p \tag{6.20}$$

adică $T(s)$ este *inversabilă la dreapta*. Avem atunci

TEOREMA 6.2. *$T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire cu $k = p$, dacă și numai dacă este inversabilă la dreapta.*

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă din cele de mai sus. Pentru suficiență să observăm că întrucît $\rho[T(s)] = p$, sigur $p \leqslant m$ și $\tilde{r}_i \triangleq \rho[\tilde{T}_i(s)] = p - 1 < m$, ultima relație asigurînd existența nulorilor $\tilde{N}_i(s)$ neidentic nuli. Să arătăm acum că $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$ sînt controlabile la ieșire. Dacă prin absurd există un i astfel încît $T_i(s)\tilde{N}_i(s)$ nu este controlabilă la ieșire aceasta revine, în acest caz particular, la $T_i(s)\tilde{N}_i(s) = 0$, adică $T(s)\tilde{N}_i(s) = 0$, rezultînd că dim Ker $T(s) \geqslant m - \tilde{r}_i = m - p + 1$, adică $\rho[T(s)]_i < p$ ceea ce contrazice ipoteza.

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că în acest caz controlabilitatea la ieșire este o condiție redundantă întrucît inversabilitatea la dreapta a lui $T_d(s)$ implică controlabilitatea funcțională a acestuia, proprietate mai puternică decît controlabilitatea la ieșire.

Observația 6.5. Se vede imediat că din $T_d(s)$ se pot selecta p coloane liniar independente, fiecare coloană conținînd un singur element nenul și găsindu-se plasată în bloc coloana determinată de matricea linie $T_{di}(s)$. Selectînd din $T_c(s)$ coloanele cu aceiași indici de coloană ca ai celor selectate din $T_d(s)$, se obține un nou compensator, inversabil la stînga, care compensează $T(s)$ pînă la o $p \times p$ matrice diagonală și nesingulară. Cu alte cuvinte, dacă $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire cu $k = p$, atunci $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire cu $q = k = p$ și $q_i = 1$, $i = 1, \ldots . p$, $T_d(s)$ fiind diagonală și nesingulară.

Cazul $k = m$

Dacă $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire atunci sigur $T_{di}(s) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$ și în consecință $\rho[T_d(s)] \geqslant m$, rezultînd din inegalitatea lui Sylvester aplicată lui $T(s)T_c(s) = T_d(s)$ că $\rho[T(s)]$, $\rho[T_c(s)] \geqslant m$ ceea ce conduce imediat, conform cu dimensiunile matricilor, la

$$\rho[T(s)] = \rho[T_c(s)] = \rho[T_d(s)] = m \tag{6.21}$$

adică $T(s)$ este *inversabilă la stînga*, iar $T_c(s)$ *este inversabilă la dreapta*. Din ultima egalitate a lui (6.21) și din structura bloc diagonală a matricii $T_d(s)$ rezultă că orice bloc coloană determinată de $T_{di}(s)$, $i = 1, \ldots, m$ are rangul egal cu unitatea. În consecință pentru orice compensator $T_c(s)$ (vezi (6.2)) avem $\rho[T(s)T_{ci}(s)] = 1$, și cum $T(s)$ este de rang maximal coloană rezultă

$$\rho[T_{ci}(s)] = 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{6.22}$$

și în particular, pentru compensatorul (6.10),

$$\rho[\tilde{N}_i(s)] = 1, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.23}$$

Cum $\tilde{N}_i(s)$ sînt de rang maximal coloană rezultă că fiecare $\tilde{N}_i(s)$ se reduce la cîte o coloană. Aceasta înseamnă că $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$ și $k = m = q$, iar (6.11) devine

$$\tilde{\mathscr{C}}_N = \mathscr{C}_D = \mathscr{C}_N \tag{6.24}$$

adică *orice compensator* $T_c(s)$ *este* $m \times m$ *nesingular*, iar $T_d(s)$ rezultă *inversabilă la stînga*. Atunci din $\rho[T_i(s)T_c(s)] = \rho[T_i(s)T_{ci}(s)] = \rho[T_{di}(s)] = 1$, rezultă că

$$\rho[T_i(s)] = 1, \quad i = 1, \ldots, m \tag{6.25}$$

adică liniile lui $T_i(s)$ se generează (peste $\mathbb{R}(s)$) din oricare linie arbitrară a acestuia, nici o linie din $T_i(s)$ nefiind nulă datorită controlabilității la ieșire a lui $T_d(s)$. (În acest sens să observăm, că dacă generarea s-ar face numai peste $\mathbb{R}$, controlabilitatea la ieșire ar fi infirmată). Avem atunci,

TEOREMA 6.3. *$T(s)$ este decuplabilă la ieșire cu $k = m$, dacă și numai dacă :*

(i) *$T(s)$ este inversabilă la stînga*
(ii) *$T(s)$ este controlabilă la ieșire*
(iii) $\rho[T_i(s)] = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Scanned with OKEN Scanner

Mai mult, clasa compensatoarelor care decuplează este dată de (6.24), orice compesator fiind $m \times m$ nesingular.

Demonstrație. Necesitatea și partea finală a teoremei rezultă din considerațiile făcute mai sus. Pentru *suficiență* să observăm că condițiile (i) și (iii) conduc la $\rho[\tilde{T}_i(s)] = m - 1$ ceea ce conduce la existența nulorilor $\tilde{N}_i(s)$ neidentic nuli cu $\rho[\tilde{N}_i(s)] = 1$, $i = 1, \ldots, m$. Considerînd acum un compensator $T_c(s)$ de tipul (6.10) rezultă că $T_i(s)\tilde{N}_i(s) \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$ căci în caz contrar dacă pentru un i am avea $T_i(s)\tilde{N}_i(s) = 0$ ar rezulta $T(s)\tilde{N}_i(s) = 0$, cu $\tilde{N}_i(s) \neq 0$ ceea ce ar contrazice condiția (i). În consecință $\rho[T_{di}(s)] = 1$, $i = 1, \ldots m$, adică $\rho[T_d(s)] = m$ ceea ce conduce la faptul că $T_c(s)$ este $m \times m$ nesingulară și în consecință conform cu (ii) la controlabilitatea la ieșire a lui $T_d(s)$.

Cazul $k = p = m$.

Acest caz reprezintă joncțiunea dintre cele două cazuri anterior discutate. Se vede imediat conform teoremei 6.3. că $q = k = p$ și $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Cazul de față (formulat, în abordările mai vechi, de la început cu $q = k = m = p$) poartă numele de *decuplare scalară* (sau problema Morgan extinsă), matricea $T_d(s)$ reducîndu-se la o matrice diagonală și nesingulară. Avem atunci direct

TEOREMA 6.4. *$p \times p$ matricea de transfer $T(s)$ este decuplabilă scalar dacă și numai dacă este inversabilă.*

Observația 6.6. Revenind la cazul $k = m$, tratat anterior, se vede că dacă din fiecare pachet de ieșire se selectează cîte o ieșire (adică o linie din $T_i(s)$) și se impune decuplarea acestora, se obține o problemă de decuplare scalară a cărei soluție, conform dezvoltărilor făcute în cazul $k = m$, revolvă în întregime problema originară. Cu alte cuvinte *problema decuplării cu $k = m$ este efectiv o problemă de decuplare scalară.*

Observația 6.7. Încadrînd teorema 6.4. în teorema 6.2 (cazul $k = p$), adică considerînd $T(s)$ inversabilă la dreapta, egalitatea $T(s)T^D(s) = I_p$, unde $T^D(s)$ este o inversă la dreapta pentru $T(s)$, (cu $T^D(s)$ inversabilă la stînga, vezi și observația 6.5) sugerează o procedură rapidă de decuplare, în particular o procedură de decuplare scalară care conform observației 6.6. va rezolva și cazul $k = m$.

În acest sens fie $T(s)$ *inversabilă la dreapta*, exprimată prin factorizarea (6.12) și ne propunem să găsim un compensator $T_c(s)$ care decuplează $T(s)$ cu $k = p = q$, $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, p$, adică $T_d(s) = T(s)T_c(s)$ să fie $p \times p$ diagonală și nesingulară (vezi observația 5.6). Fie $T_c(s)$ un astfel de compensator. Avem evident

$$R(s)P^{-1}(s)T_c(s) = R_d(s)P_d^{-1}(s) \tag{6.26}$$

unde $T_d(s) \triangleq R_d(s)P_d^{-1}(s)$. Punînd

$$R_c(s) = P^{-1}(s)T_c(s)P_d(s) \tag{6.27}$$

avem din (6.26)

$$R(s)R_c(s) = R_d(s) \tag{6.28}$$

adică matricea rațională $R_c(s)$ decuplează matricea $R(s)$ pînă la o matrice polinomială $R_d(s)$. Pe de altă parte din (6.28) rezultă că

$$R^D(s) \triangleq R_c(s)R_d^{-1}(s) \tag{6.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

este o inversă la dreapta a lui $R(s)$. Fie atunci $R^D(s)$ o inversă la dreapta a lui $R(s)$, factorizată în forma (6.29) cu $R_c(s)$ și $R_d(s)$ polinomiale, $R_d(s)$ *diagonală*, iar $R_c(s)$ *neavînd divizori diagonali la dreapta decît unimodulari* (deci constanți). O astfel de factorizare se poate realiza imediat întotdeauna (exercițiu pentru cititor).

Definim cu ajutorul lui (6.27)

$$T_c(s) = P(s)R_c(s)P_d^{-1}(s) \tag{6.30}$$

unde $P_d(s)$ este o matrice polinomială diagonală cu gradele polinoamelor de pe diagonală alese atît cît este necesar ca $T_c(s)$ să fie proprie. Atunci evident din (6.29)

$$T(s)T_c(s) = R(s)P^{-1}(s)P(s)R_c(s)P_d^{-1}(s) =$$

$$= R(s)R_c(s)R_d^{-1}(s)R_d(s)P_d^{-1}(s) = R(s)R^D(s)T_d(s) = T_d(s) \tag{6.31}$$

(unde $T_d(s)$ este proprie deoarece $T(s)$ și $T_c(s)$ sînt proprii).
Rezultă atunci următoarea:

Procedură de decuplare (PD)
pentru $T(s)$ *inversabilă la dreapta* (în particular *nesingulară*) *cu* $k=p=q$, $q_i = 1,\ i = 1,\ldots,p$.

1. Se factorizează $T(s)$ în $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$.
2. Se calculează o inversă la dreapta $R^D(s)$ a lui $R(s)$.
3. Se factorizează la dreapta $R^D(s)$ cu numitor diagonal, $R^D(s) = R_c(s)R_d^{-1}(s)$ și $R_c(s)$ neavînd divizori diagonali la dreapta (decît constanți).
4. Se alege $P_d(s) = \text{diag}\,(p_{di}(s))$ cu $\partial[p_{di}(s)] = \partial_{ci}[P(s)R_c(s)]$, $i = 1,\ldots,p$ și se construiește compensatorul $T_c(s) = P(s)R_c(s)P_d^{-1}(s)$.

În cazul de decuplare cu $k = m$, deoarece $\rho[R_i(s)] = 1,\ i = 1,\ldots,m$, procedura PD de mai sus se aplică întocmai considerînd *în locul matricii* $R(s)$, $m \times m$ *matricea nesingulară* $\bar{R}(s)$ *în care linia* i *este orice linie din* $R_i(s)$, $i = 1,\ldots,m$ și în care caz operația de inversare la dreapta se reduce la inversarea lui $\bar{R}(s)$ (lăsăm justificarea procedurii ca exercițiu pentru cititor).

În concluzie procedura PD de mai sus, furnizează o soluție pentru toate cazurile de decuplare discutate în acest paragraf, în ipoteza satisfacerii condițiilor din teoremele enunțate.

6.3. STABILIZAREA DECUPLĂRII ÎN CIRCUIT DESCHIS

Problema abordată în acest paragraf se enunță astfel: *dîndu-se sistemul* (6.17), (6.18) *cu* $R(s)$, $P(s)$ *coprime la dreapta și* $P(s)$ *coloană proprie, avînd matricea de transfer* $T(s) = R(s)\,P^{-1}(s)$ *decuplabilă controlabil la ieșire, se cere să se stabilizeze*, dacă este cazul, *sistemul dat și apoi să se construiască pentru noul sistem obținut*, dacă este posibil, *un compensator stabil care să-l decupleze controlabil la ieșire.*

Răspunsul la această problemă este dat de

LEMA 6.1. Fie $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ o factorizare arbitrară a lui $T(s)$. Atunci $T(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire dacă și numai dacă

$$T_1(s) = R(s)P_1^{-1}(s) \tag{6.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

este decuplabilă controlabil la ieșire, unde $P_1(s)$ este orice $m \times m$ matrice polinomială nesingulară (vezi și observația 6.1)

Demonstrație. Conform cu (4.54) există pentru $\tilde{T}_i(s)$, nulorii $\tilde{N}_i(s)$ de forma

$$\tilde{N}_i(s) = P(s)\hat{\tilde{R}}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i. \tag{6.33}$$

Avem atunci

$$0 = \tilde{T}_i(s)\tilde{N}_i(s) = \tilde{R}_i(s)P^{-1}(s)P(s)\hat{R}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i = \tag{6.34}$$

$$= \tilde{R}_i(s)\hat{\tilde{R}}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i = \tilde{R}_i(s)P_1^{-1}(s)P_1(s)\hat{\tilde{R}}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i \triangleq \tilde{T}_{1i}(s)\tilde{N}_{1i}(s)$$

cu $i = 1, \ldots, k$, ceea ce exprimă conservarea proprietății de decuplabilitate. De asemenea din

$$T_i(s)\tilde{N}_i(s) = R_i(s)P^{-1}(s)P(s)\hat{\tilde{R}}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i = R_i(s)P_1^{-1}(s)P_1(s)\hat{\tilde{R}}_i^{-1}(s)\tilde{\tilde{G}}_i =$$

$$= T_{i1}(s)\tilde{N}_{i1}(s) \tag{6.35}$$

rezultă conservarea proprietății de controlabilitate la ieșire.

În consecință $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ este decuplabilă controlabil la ieșire dacă și numai dacă $T_F(s) \triangleq R(s)(P(s) - F(s))^{-1}$, cu $\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)]$, este decuplabilă controlabil la ieșire, adică stabilizarea (alocarea) sistemului (6.17), (6.18) prin legea de comandă $u(s) = F(s)z(s) + v(s)$, $\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)]$ *nu altează* proprietatea de decuplabilitate controlabilă la ieșire a acestuia. Implementarea efectivă a legii de comandă se face cu un estimator de $F(s)z(s)$, operație posibilă deoarece $R(s)$ și $P(s)$ sînt coprime la dreapta.

Urmează acum construcția unui compensator stabil $T_c(s)$ pentru $T_F(s)$. Pentru aceasta este suficient ca în soluția (6.10) nulorii $\tilde{N}_i(s)$ să fie alocați (vezi paragraful 4.2). Mai exact, acesta revine la construcția unor nulori polinomiali pentru $\operatorname{Ker} \tilde{T}_i(s) = \operatorname{Ker} \tilde{R}_i(s)P^{-1}(s)$, $i = 1, \ldots, k$ și atașarea corespunzătoare de numitori alocați astfel încît nulorii polinomiali să devină nulori proprii. În particular se poate alege pentru (6.10)

$$\bar{T}_{c*}(s) \hat{=} [\tilde{\tilde{N}}_{1*}(s) \ldots \tilde{\tilde{N}}_{k*}(s)] \tag{6.36}$$

unde $\tilde{\tilde{N}}_{i*}(s)$ sînt *nulorii minimali alocați*, asociați fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$, $i = 1, \ldots, k$ (vezi definiția 4.8 și observația 4.8)

Observația 6.8. Revenind la procedura de decuplare *PD*, descrisă la finele paragrafului 6.2, care așa cum s-a văzut rezolvă problema decuplării în cazurile particulare discutate în paragraful 6.2, se constată imediat că această procedură furnizează un compensator stabil. Într-adevăr aceasta revine la simpla alegere a polinoamelor de pe diagonala lui $P_d(s)$ (vezi pasul 4.) cu zerourile în $\mathbb{C}^-$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie sistemul

$$P(s)z(s) = u(s) \tag{6.37}$$

$$y(s) = R(s)z(s) \tag{6.38}$$

cu $R(s)$, $P(s)$ *coprime la dreapta* şi $P(s)$ *coloană proprie.*

Problema decuplării în circuit închis a sistemului (6.37) (6.38) *constă în găsirea unui compensator prin reacţie după stare* ($P_a(s)$, $Q_a(s)$, $L_a(s)$) al sistemului (6.37), (6.38), (vezi definiţia 5.5.) *astfel încît* $T_a(s) \triangleq P(s)(P_a(s)\,P(s) - Q_a(s)S(s))^{-1}L_a(s))$ (vezi 5.157) *să fie o soluţie a problemei decuplării prin compensare serie a matricii de transfer* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ *a sistemului* (6.37), (6.38), adică $T_a(s) \triangleq T(s)T_a(s)$ să fie (bloc) decuplată şi controlabilă la ieşire (vezi problema decuplării prin compensare serie enunţată la începutul paragrafului 6.1). Cerinţa ca $R(s)$ şi $P(s)$ să fie coprime la dreapta este necesară *implementării realizării prin reacţie cu ajutorul unui estimator.* Direct din teorema 5.10 avem

TEOREMA 6.5. *Problema decuplării în circuit închis a sistemului* (6.37), (6.38) *are o soluţie dacă şi numai dacă problema decuplării prin compensare serie a matricii de transfer* $T(s)$, *asociate, are o soluţie.*

În consecinţă rezolvarea problemei decuplării în circuit închis se va face în maniera abordărilor din paragraful 5.5 privind sinteza exactă în circuit închis. Mai exact, presupunînd sistemul (6.37), (6.38) decuplabil, adică conform teoremei 6.5 $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ decuplabilă, se parcurg următoarele etape:

1. se determină un compensator $T_c(s)$ care decuplează controlabil la ieşirea $T(s)$, în particular (6.10);
2. se construieşte o realizare prin reacţie după stare a lui $T_c(s)$ (în raport cu sistemul (6.37), (6.38) ($P_a(s)$, $Q_a(s)$, $L_a(s)$) care reprezintă o soluţie a problemei decuplării în circuit închis.

Parcurgerea celor două etape de mai sus se va face în cadrul următoarelor ipoteze valabile pe tot parcursul prezentului paragraf:

(I) $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ este *decuplabilă* controlabil *la ieşire* (cu $R(s)$, $P(s)$ coprime la dreapta şi $P(s)$ coloană proprie)

(II) *Soluţiile* $T_c(s)$ ale problemei decuplării prin compensare serie *vor fi localizate la nivelul clasei* $\tilde{\mathcal{C}}_N$ (vezi (6.11)) adică se vor considera numai soluţiile de forma (6.10).

Cu aceste ipoteze vom trece la

Problema D 1. Să se găsească $T_c(s)$ ($\in \tilde{\mathcal{C}}_N$) astfel încît polii matricei raţionale $P^{-1}(s)T_c(s)$ să fie alocabili.

Pentru rezolvarea problemei de mai sus fie $\bar{\bar{N}}_i(s)$ P-nulorii minimali asociaţi factorizărilor $\tilde{T}_i(s) = \tilde{R}_i(s)P^{-1}(s)$, $i = 1, \ldots, k$ (vezi definiţia 4.7). Conform cu (4.77) şi (4.78) avem

$$\bar{\bar{N}}_i(s) = \bar{P}_i(s)\bar{W}_i^{-1}(s) = P(s)\bar{U}_i(s)\bar{W}_i^{-1}(s) \tag{6.39}$$

unde coloanele lui $\bar{P}_i(s)$ formează o bază redusă pentru $\operatorname{Ker} \tilde{T}_i(s)$ (dar nu minimală întrucît $\tilde{R}_i(s)$ şi $P(s)$ nu sînt în mod obligator coprime la

Scanned with OKEN Scanner

dreapta), iar coloanele lui $\bar{U}_i(s)$ formează o bază minimală (dar nu și redusă) pentru Ker $\tilde{R}_i(s)$. $\bar{W}_i(s)$ este coloană proprie cu

$$\partial_c[\bar{W}_i(s)] = \partial_c[\bar{P}_i(s)]. \tag{6.40}$$

Scriind acum pentru (6.10)

$$\bar{T}_c(s) \triangleq [\bar{\tilde{N}}_1(s) \dots \bar{\tilde{N}}_k(s)] \tag{6.41}$$

rezultă conform cu (6.39)

$$\bar{T}_c(s) = P(s)[\bar{U}_1(s) \dots \bar{U}_k(s)] \operatorname{diag}(\bar{W}_i^{-1}(s)) \triangleq P(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s) \tag{6.42}$$

sau încă

$$P^{-1}(s)\bar{T}_c(s) = [\bar{U}_1(s) \dots \bar{U}_k(s)] \operatorname{diag}(\bar{W}_i^{-1}(s)) = \bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s). \tag{6.43}$$

Cum matricile $\bar{W}_i(s)$, $i = 1, \dots, k$ sînt alocabile rezultă că $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ este *bloc alocabilă* (adică la nivelul fiecărui $\bar{W}_i(s)$).

Fie acum conform cu (4.74)

$$\bar{\delta}_i \triangleq \partial[|\bar{P}_i(s)|] = \partial[|\bar{W}_i(s)] \tag{6.44}$$

și fie

$$\bar{\delta} \triangleq \sum_{i=1}^{k} \delta_i. \tag{6.45}$$

Avem atunci, direct din cele de mai sus

TEOREMA 6.6. *Fie* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ *decuplabilă controlabil la ieșire. Fie* Λ_i, $i = 1, \dots, k$, k *șiruri simetrice de numere complexe cu* $|\Lambda_i| = \bar{\delta}_i$ *și* $\Lambda \triangleq \Lambda_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \Lambda_k$, $|\Lambda| = \bar{\delta}$. *Există atunci un compensator* $\bar{T}_c(s) \in \bar{\mathscr{C}}_N$, *de forma (6.42), astfel încît polii matricei raționale* $P^{-1}(s)T_c(s)$ *sînt conținuți în* Λ*). Avem astfel un răspuns la problema D1.

Observația 6.9. Întrucît $\bar{U}_i(s)$, $i = 1, \dots, k$ sînt prime la dreapta rezultă că în reprezentarea (6.42) $\bar{U}(s)$ și $\bar{W}(s)$ *nu au divizori comuni la dreapta bloc diagonali***) (compatibili cu structura bloc diagonală a lui $W(s)$) *oricare ar fi numitorul* $\bar{W}(s) \triangleq \operatorname{diag}(\bar{W}_i(s))$.

Fie acum $\tilde{N}_i(s)$ un set de nulori proprii asociați fiecare cu $\tilde{T}_i(s)$ $i = 1, \dots, k$. Conform cu (4.79) și (4.82) fiecare $\tilde{N}_i(s)$ se poate reprezenta în forma

$$\tilde{N}_i(s) = P(s)Z_i(s)W_i^{-1}(s) = P(s)\bar{U}_i(s)K_i(s)W_i^{-1}(s) \tag{6.45'}$$

unde $Z_i(s)$ este o bază polinomală pentru Ker$\tilde{R}_i(s)$, $Z_i(s)$ și $W_i(s)$ sînt coprime la dreapta, iar $\bar{W}_i(s)$ este coloană proprie.

---

*) Polii matricei raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ sînt polii oricărei factorizări prime la dreapta a acesteia deci se conțin în zerourile lui $\bar{W}(s)$.

**) Evident neunimodulari.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind (6.46) în (6.10) obţinem

$$T_c(s) = P(s)[\bar{U}_1(s) \ldots \bar{U}_k(s)] \operatorname{diag}(K_i(s)) \operatorname{diag}(W_i^{-1}(s)) =$$

$$\triangleq P(s)\bar{U}(s)K(s)W^{-1}(s). \tag{6.46}$$

Observaţia 6.10. În reprezentarea (6.46) $\bar{U}(s)K(s)$ şi $W(s)$ nu au divizori comuni la dreapta bloc diagonali. Dar, spre deosebire de reprezentarea (6.42), dacă numitorul $W(s) = \operatorname{diag}(W_i(s))$ este schimbat cu altul $\hat{W}(s) = \operatorname{diag}(\hat{W}_i(s))$ cu $\partial_c[W_i(s)] = \partial_c[\hat{W}_i(s)]$, $i = 1, \ldots, k$, atunci $\bar{U}(s)K(s)$ şi $\hat{W}(s)$ pot avea divizori comuni la dreapta bloc diagonali neunimodulari.

Observaţia 6.11. Din modul de obţinere al reprezntării (6.46) rezultă că *orice compensator* $T_c(s) \in \tilde{\mathscr{C}}_N$ *poate fi reprezentat în această formă.* Vom numi reprezentarea (6.46), *reprezentarea bloc diagonală* a lui $T_c(s)$. În particular unii compensatori, de tipul $\bar{T}_c(s)$ pot fi reprezentaţi în forma (6.42) pe care o numim conform observaţiei 6.9 *reprezentare bloc diagonal ireductibilă.* Zerourile lui $W(s)(\bar{W}(s))$ *se numesc polii reprezentării bloc diagonale* (*ireductibile*).

Fie acum un $T_c(s) \in \tilde{\mathscr{C}}_N$ în reprezentarea bloc diagonală. Introducem, conform cu (4.80).

$$\delta_i \triangleq \partial[|W_i(s)|], \quad i = 1, \ldots, k \tag{6.47}$$

şi

$$\delta \triangleq \sum_{i=1}^{k} \delta_i. \tag{6.48}$$

Avem atunci, direct din lema 4.1

LEMA 6.2. Pentru orice $T_c(s) \in \tilde{\mathscr{C}}_N$ reprezentat bloc diagonal avem

$$\bar{\delta} \leqslant \delta \tag{6.49}$$

cu $\bar{\delta}$ şi δ introduşi prin (6.45) şi respectiv (6.48).

Observaţia 6.12. Cum orice compensator de tipul $\bar{T}_c(s)$, în reprezentarea bloc diagonal ireductibilă are acelaşi $\bar{\delta}$, rezultă că *subclasa reprezentărilor bloc diagonal ireductibile posedă o proprietate de minimalitate la nivelul reprezentărilor bloc diagonale ale clasei* $\tilde{\mathscr{C}}_N$, exprimată prin (6.49). Această proprietate de minimalitate se exprimă şi prin următorul corolar al lemei 6.2.

COROLARUL 6.1. Nu există o reprezentare bloc diagonală a unui $T_c(s)$ din $\tilde{\mathscr{C}}_N$ astfel încît polii acestei reprezentări să poată fi alocaţi arbitrar şi în totalitate în număr strict mai mic decît $\bar{\delta}$.

Acest corolar devine un rezultat esenţial în

Cazul decuplării cu $k = m$

În acest caz de decuplabilitate, aşa cum s-a văzut în 6.2, *orice compensator* $T_c(s)$ *care decuplează este* $m \times m$ *nesingular* ($\tilde{\mathscr{C}}_N = \mathscr{C}_D$, vezi (6.24)).

În consecinţă matricele $\bar{W}(s)$, $K(s)$ şi $W(s)$ din (6.42) şi (6.46) devin diagonale, iar reprezentările (6.42) şi (6.46) vor fi denumite *reprezentarea diagonal ireductibilă* şi respectiv *reprezentare diagonală*.

Scanned with OKEN Scanner

Avem atunci

TEOREMA 6.7. *Nu există în $\mathcal{C}_D$ un compensator $T_c(s)$ pentru care polii matricei raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ să fie alocați în totalitate și arbitrar în număr strict mai mic decît δ.*

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că ar exista un astfel de compensator $T_c(s)$. Punem atunci

$$P^{-1}(s)T_c(s) = \Pi_c(s)P_c^{-1}(s) \tag{6.50}$$

cu $\Pi_c(s)$ și $P_c(s)$ coprime la dreapta și unde zerourile lui $|P_c(s)|$ au fost toate alocate arbitrar, iar

$$\partial[|P_c(s)|] < \bar{\delta}. \tag{6.51}$$

Compensatorul $T_c(s)$ poate fi însă reprezentat diagonal adică

$$T_c(s) = P(s)\bar{U}(s)K(s)W^{-1}(s). \tag{6.52}$$

Avem atunci din (6.50) și (6.52)

$$\bar{U}(s)K(s)W^{-1}(s) = \Pi_c(s)P_c^{-1}(s). \tag{6.53}$$

Întrucît $K(s)$ și $W(s)$ sînt diagonale ele comută și în consecință (6.53) se mai scrie

$$\bar{U}(s)W^{-1}(s) = \Pi_c(s)(K(s)P_c(s))^{-1}. \tag{6.54}$$

Dar din (6.51) avem

$$\partial[|K(s)P_c(s)|] < \bar{\delta} + \partial[|K(s)|] = \partial[|P(s)\bar{U}(s)|] +$$

$$+ \partial[|K(s)|] = \partial[|P(s)\bar{U}(s)K(s)|] \leqslant \partial[|W(s)|] \tag{6.55}$$

ultima inegalitate fiind o consecință a faptului că $T_c(s)$ este proprie. Așadar

$$\partial[|K(s)P_c(s)|] < \partial[|W(s)|]. \tag{6.56}$$

Inegalitatea (6.56) arată că membrul drept al lui (6.54) se obține din simplificarea unui divizor comun la dreapta neunimodular al lui $\bar{U}(s)$ și $W(s)$. Fie $D(s)$ acest divizor care evident nu poate fi diagonal (vezi observația 6.10)

Așadar avem

$$\bar{U}(s) = \Pi_c(s)D(s) \tag{6.57}$$

și

$$W(s) = K(s)P_c(s)D(s). \tag{6.58}$$

Din (6.58) rezultă imediat, deoarece $K(s)$ și $W(s)$ comută ca fiind diagonale,

$$K^{-1}(s)W(s) = W(s)K^{-1}(s) = P_c(s)D(s) \tag{6.59}$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitate care arată că $\bar{U}(s)K(s)$ și $W(s)$ au ca divizor comun la dreapta pe $K(s)$ care este o matrice diagonală. În consecință în mod obligator $K(s)$ trebuie să fie unimodulară și cum este și diagonală rezultă $K(s)=$ct. sau, fără a restrînge generalitatea

$$K(s) = I_m. \tag{6.60}$$

Cu (6.60), (6.58) devine

$$W(s) = P_c(s)D(s). \tag{6.61}$$

Din (6.57) rezultă că zerourile lui $D(s)$ sînt conținute în zerourile lui $\bar{U}(s)$ care sînt *fixe*. În virtutea arbitrarității alocării se poate considera că toate zerourile lui $P_c(s)$ sînt diferite de zerourile lui $\bar{U}(s)$ și deci și de cele ale lui $D(s)$. Întrucît $W(s)$ este diagonală, se poate factoriza în

$$W(s) = W_c(s)W_D(s) \tag{6.62}$$

cu $W_c(s)$ și $W_D(s)$ diagonale și unde zerourile lui $W_c(s)$ coincid cu cele ale $P_c(s)$, iar zerourile lui $W_D(s)$ coincid cu cele ale lui $D(s)$, zerourile lui $W_c(s)$ și $W_D(s)$ fiind diferite. Atunci din (6.61) și (6.62) avem

$$W_c(s) = P_c(s)D(s)W_D^{-1}(s) \tag{6.63}$$

rezultînd că $V(s) \triangleq D(s)W_D^{-1}(s)$ este polinomială întrucît în caz contrar din (6.63) ar rezulta că $W_D(s)$ simplifică și zerouri din $P_c(s)$ ceea ce este absurd. Mai mult se vede imediat că $V(s)$ este unimodulară. Avem atunci în definitiv

$$D(s) = V(s)W_D(s) \tag{6.64}$$

cu (6.64), (6.57) și (6.61) devin

$$\bar{U}(s) = \Pi_c(s)V(s)W_D(s) \tag{6.65}$$

$$W(s) = P_c(s)V(s)W_D(s) \tag{6.66}$$

rezultînd că $W_D(s)$ este un divizor comun la dreapta diagonal al lui $\bar{U}(s)$ și $W(s)$ și în consecință $W_D(s)$ trebuie să fie unimodulară (vezi (6.52) și (6.60)), adică conform cu (6.64) $D(s)$ este unimodulară. Atunci din (6.61) rezultă

$$\partial[|W(s)|] = \partial[|P_c(s)|] \tag{6.67}$$

și ținînd cont de lema 6.1, (6.67) implică

$$\partial[|P_c(s)|] \geqslant \bar{\delta} \tag{6.68}$$

ceea ce contrazice (6.51), teorema fiind complet demonstrată.

COROLARUL 6.2. Fie Λ_i, $i = 1, \ldots, m$, m seturi simetrice de numere complexe cu $|\Lambda|_i = \delta_i$ și $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ unde $|\Lambda| = \delta$. Aplicînd procedura care a condus la teorema 6.6, *există o reprezentare diagonal*

ireductibilă a unui compensator $\bar{T}_c(s)$ *din* $\mathscr{C}_D$ *astfel încît polii acestei reprezentări să coincidă cu* Λ. Teorema 6.7. *evidențiază faptul că* $\bar{\delta}$ *este ordinul minim (gradul McMillan minim) al matricilor raționale* $P^{-1}(s)T_c(s)$ *pentru care polii acestora pot fi alocați în totalitate și în mod arbitrar, iar* $T_c(s)$ *să se mai găsească încă în* $\mathscr{C}_D$, *adică încă să mai decupleze.*

Observația 6.13. Pentru a fi mai expliciți în privința ultimei afirmații din corolarul 6.2. să observăm că *dacă* Λ *este diferit de zerourile lui* $\bar{U}(s)$ *atunci polii matricei raționale* $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ *coincid cu* Λ. În consecință luînd în Λ, în mod intenționat și zerouri ale lui $\bar{U}(s)$, în vederea unor simplificări între $\bar{U}(s)$ și $\bar{W}(s)$ (cu divizori evident nediagonali), polii matricei raționale $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ ar putea să fie în număr strict mai mic decît $\bar{\delta}$. Dar acești poli *nu pot rezulta arbitrari* căci atunci am ajunge la contradicția evidențiată în demonstrația teoremei 6.7. În consecință aceștia mai conțin în mod obligatoriu încă zerouri ale lui $\bar{U}(s)$, ceea ce infirmă arbitrariatatea alocării.

Rezultatele exprimate de corolarul 6.1, în general și de corolarul 6.2, în cazul particular al decuplării cu $k = m$, permit să se abordeze, în cadrul acelorași ipoteze (I) și (II),

Problema D2. Să se găsească un $T_{c0}(s)$ ($\in \widetilde{\mathscr{C}}_N$) astfel încît ordinul n_{a0} (vezi definiția 5.6) al realizării prin reacție după stare a lui $T_{c0}(s)$ (în raport cu sistemul (6.37), (6.38)) să fie minim față de toți $T_c(s) \in \widetilde{\mathscr{C}}_N$ și să permită totodată alocarea arbitrară a polilor acestei realizări (vezi (5.159) în definiția 5.6).

Vom începe prin a alege pentru $T_{c0}(s)$, tipul de compensator $\bar{T}_c(s)$, care admite o reprezentare bloc diagonal ireductibilă, și pentru care cei $\bar{\delta}$ poli ai reprezentării sale sînt bloc alocabili. Fie $(\bar{P}_a(s), \bar{Q}_a(s), \bar{L}_a(s))$ realizarea minimală prin reacție după stare a lui $\bar{T}_c(s)$ furnizată de teorema 5.9. Polii acestei realizări, care sînt zerourile polinomului $|\bar{P}_a(s)P(s) - \bar{Q}_a(s)S(s)|$ (vezi 5.159), se compun din polii matricei raționale $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$, care sînt alocabili după cum afirmă teorema 6.6. și din $\bar{n}_0$ poli care sînt de asemenea alocabili ($\bar{n}_0 = \partial[|\Delta(s)|]$), cu $\Delta(s)$ introdus prin (5.184). Așadar *toți polii realizării sînt alocabili.*

Notînd cu : $n = \partial[|P(s)|]$ ordinul sistemului inițial, $\bar{n}_a = \partial[|\bar{P}_a(s)|]$ ordinul realizării sau al extensiunii (vezi definiția 5.6), $\bar{\delta}_c$ ordinul matricei raționale $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ (vezi (5.169)), avem egalitatea evidentă

$$\bar{n}_a + n = \bar{n}_0 + \bar{\delta}_c \tag{6.69}$$

unde $\bar{n}_0$ arată că polii lui $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ se introduc în circuit închis împreună cu încă $\bar{n}_0$ poli alocabili, pe care procedura din teorema 5.9 îi minimizează ca număr. De asemenea

$$\bar{\delta}_c \leqslant \bar{\delta}. \tag{6.70}$$

Punînd

$$\bar{n}_e \triangleq n_0 + \bar{\delta} - n \tag{6.71}$$

rezultă din (6.69) și (6.70) că

$$\bar{n}_a \leqslant \bar{n}_e. \tag{6.72}$$

Inegalitatea (6.72) arată că $\bar{n}_e$ *definit prin* (6.71) *este un majorant pentru ordinul unei realizări care asigură decuplarea în circuit închis simultan cu alocarea arbitrară și în totalitate a polilor* (sistemului rezultant, adică zerourile lui $|\bar{P}_a(s)P(s) - \bar{Q}_a(s)S(s)|$).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care $\rho[(\bar{T}_c(s))] = m$, pe baza observației 5.17 și a procedurii din teorema 5.9, rezultă $\bar{n}_0 = 0$ și în consecință $\bar{n}_e = \bar{\delta} - n$.

În *cazul decuplării* cu $k = m$, $\bar{T}_c(s)$ este nesingular, iar conform corolarului 6.2, $\bar{\delta}$ este ordinul minim al matricilor raționale $P^{-1}(s)T_c(s)$ pentru care polii acestora pot fi alocați în totalitate și în mod arbitrar, iar $\bar{T}_c(s)$ să se mai găsească încă în $\mathscr{C}_D$. De asemenea, observația 6.13 subliniază că pentru arbitrariatea alocării, (6.70) trebuie considerată egalitate. În consecință (6.72) devine identitate, $\bar{n}_a = \bar{\delta} - n$, fiind *în acest caz particular de decuplare, un răspuns definitiv la problema D2.* Pentru cazul general de decuplare, ne vom mulțumi ca răspuns la problema D2, cu inegalitatea (6.72). Faptul că aceasta devine egalitate în cazul $k = m$ ne face să afirmăm cu $\bar{n}_e$ definit prin (6.71) este un *majorant eficient.*

Ca finalitate procedurală la problema D2, în cazul decuplării cu $k = m$, să observăm că aplicînd procedura PD acestui caz, compensatorul care se obține este în forma diagonal ireductibilă și în consecință *procedura* PD *rezolvă complet problema* D2 *la nivelul* $k = m$.

Ilustrăm acum pe două exemple modalitatea efectivă de decuplare în circuit închis.

Exemplu 6.1. Fie matricea de transfer

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \hline T_2(s) \end{bmatrix}$$

factorizată prim la dreapta în

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 & 1 \\ \hline s & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = R(s)P^{-1}(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \hline R_2(s) \end{bmatrix} P^{-1}(s).$$

Se cere să se decupleze controlabil la ieșire cu $k = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, în circuit închis simultan cu alocarea polilor, sistemul asociat factorizării lui $T(s)$.

Se vede că $\tilde{T}_1(s) = \tilde{R}_1(s)P^{-1}(s) = R_2(s)P^{-1}(s)$ și $\tilde{T}_2(s) = \tilde{R}_2(s)P^{-1}(s) = R_1(s)P^{-1}(s)$. Vom proceda astfel:

1. Se aduc $\tilde{R}_1(s)$ și $\tilde{R}_2(s)$ la forma de eșalon redus pe coloane operînd asupra coloanelor lui $\begin{bmatrix} \tilde{R}_1(s) \\ \hline P(s) \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} \tilde{R}_2(s) \\ \hline P(s) \end{bmatrix}$ rezultînd

Scanned with OKEN Scanner

corespunzător

$$\left[\begin{array}{ccc} s & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & s(s+1) & \\ 0 & s+2 & 0 & \\ s & 0 & -s^2 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{1a}(s) & 0 \\ \hline & \\ & \bar{P}_1(s) \\ & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} s+1 & 1 & 0 \\ \hline s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & s(s+1) \\ 0 & s+2 & 0 \\ s & -s & -s(s+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}_{2a}(s) & 0 \\ \hline & \\ & \bar{P}_2(s) \\ & \end{array}\right]$$

unde $\bar{P}_1(s)$ şi $\bar{P}_2(s)$ rezultă direct coloană proprie (fără a mai fi necesar a se efectua operaţii elementare asupra coloanelor acestora în acest scop) şi reprezintă două baze reduse pentru Ker $\tilde{T}_1(s)$ şi Ker $\tilde{T}_2(s)$ (a se observa că $\bar{P}_1(s)$ şi $\bar{P}_2(s)$ nu sînt prime dreapta).

2. Se efectuează produsul $T(s)[P_1(s) \vdots P_2(s)]$ rezultînd

$$\left[\begin{array}{c} T_1(s) \\ \hline T_2(s) \end{array}\right] [P_1(s) \vdots P_2(s)] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

blocurile matricei din membrul drept rezultînd controlabile la ieşire. În consecinţă, conform teoremei 6.1. problema decuplării prin compensare serie are o soluţie cu $q_1 = 1$ şi $q_2 = 2$.

3. Se construiesc P-nulorii minimali alocaţi

$$\bar{N}_1(s) = \bar{P}_1(s)\bar{W}_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} s(s+1) \\ 0 \\ -s^2 \end{bmatrix} (s^2 + \alpha s + \beta)^{-1}$$

şi

$$\bar{N}_2(s) = \bar{P}_2(s)\bar{W}_2^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s(s+1) \\ s+2 & 0 \\ -s & -s(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ c & s^2 + as + b \end{bmatrix}^{-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

(cu $\bar{W}_2(s)$ global alocată), rezultînd compensatorul

$$\bar{T}_c(s)=[\bar{N}_1(s)\,|\,\bar{N}_2(s)]=\left[\begin{array}{c|c|c} s(s+1) & 0 & s(s+1) \\ 0 & s+2 & 0 \\ -s^2 & -s & -s(s+1) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} s^2+\alpha s+\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & s & -1 \\ 0 & c & s^2+as+b \end{array}\right]^{-1}$$

Efectuînd produsul $P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)$ rezultă

$$P^{-1}(s)\bar{T}_c(s)=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & -1 & -(s+1) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} s^2+\alpha s+\beta & 0 & 0 \\ \hline 0 & s & -1 \\ 0 & c & s^2+as+b \end{array}\right]^{-1}=$$

$$=[\bar{U}_1(s)\,|\,\bar{U}_2(s)]\left[\begin{array}{c|c} \bar{W}_1(s) & 0 \\ \hline 0 & \bar{W}_2(s) \end{array}\right]^{-1}=\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s)$$

unde se vede că $\bar{U}_1(s)$ şi $\bar{U}_2(s)$ sînt prime la dreapta adică $\bar{T}_c(s)=P(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s)$ este o reprezentare bloc diagonal ireductibilă (de observat că $\bar{W}_2(s)$ a fost global alocat cu un polinom de gradul 3).

Pentru construcţia realizării prin reacţie după stare a lui $\bar{T}_c(s)$, întrucît $\rho[|\bar{T}_c(s)|]=m=3$, se va aplica procedura din teorema 5.7 (vezi observaţia 5.17, $\bar{n}_0=0$).

Exemplul 6.2. Să se decupleze scalar, în circuit închis simultan cu alocarea polilor, sistemul din exemplul 6.1. astfel încît ordinul realizării prin reacţie (extensiunea sistemului rezultant) să fie minim. Aplicăm procedura *PD*.

1. Se calculează $R^{-1}(s)$. Pentru exemplul de faţă este suficient să calculăm matricea adjunctă

$$R^{+}(s)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ s & -s-1 & -s \end{bmatrix}$$

din care nu se poate elimina nici un divizor diagonal la dreapta, adică $R_c(s)=R^{+}(s)$.

2. Se efectuează produsul

$$P(s)R_c(s)=\begin{bmatrix} -s(s+1) & s(s+1) & s(s+1) \\ 0 & 0 & -(s+2) \\ s^2 & -s(s+1) & -s^2 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\bar{T}_c(s) = P(s)R_c(s)\,\mathrm{diag}\,(p_{d1}(s),\ p_{d2}(s),\ p_{d3}(s))^{-1}$$

cu $\partial[p_{di}(s)] = \partial_{ci}[P(s)\bar{R}_c(s)] = 2,\ i = 1, 2, 3.$
În încheierea acestui paragraf ne vom ocupa (ipotezele I și II rămînînd valabile) de

Problema D3. Să se găsească un $\hat{T}_{c0}(s)$ ($\in \tilde{\mathscr{C}}_N$) astfel încît ordinul $\hat{n}_{a0}$ al realizării prin reacție după stare a lui $\hat{T}_{c0}(s)$ să fie minim față de toți $T_c(s) \in \tilde{\mathscr{C}}_N$.

Vom începe cu

Cazul decuplării cu $k = m$

Așa cum s-a văzut, în acest caz $\mathscr{C}_D = \tilde{\mathscr{C}}_N$, iar orice compensator $T_c(s) \in \mathscr{C}_D$ este $m \times m$ nesingular. În consecință (vezi observația 5.17 și (5.179)) *ordinul minim al realizării prin reacție după stare a unui* $T_c(s) \in \mathscr{C}_D$ este dat de $\delta_c - n$ ($\delta_c \triangleq \delta[P^{-1}(s)T_c(s)]$, $n \triangleq \partial[|P(s)|]$). Așadar problema D3 se reduce la *găsirea unui* $\hat{T}_c(s) \in \mathscr{C}_D$ *astfel încît ordinul matricei raționale* $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$ *să fie minim față de toți* $T_c(s) \in \mathscr{C}_D$.

Avînd în vedere că $\rho[R_i(s)] = 1,\ i = 1, \ldots, m$ se poate scrie

$$R_i(s) = R_i^*(s)\bar{R}_i(s),\ i = 1, \ldots, m \tag{6.73}$$

unde $R_i^*(s)$ este $p_i \times l$, iar $\bar{R}_i(s)$ este $1 \times m$, elementele lui $R_i^*(s)$ fiind corespunzător, cei mai mari divizori comuni la stînga ai liniilor care compun $R_i(s)$. Punînd

$$R^*(s) \triangleq \begin{bmatrix} R_1^*(s) & & \\ & \ddots & \\ & & R_m^*(s) \end{bmatrix} \tag{6.74}$$

și

$$\bar{R}(s) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{R}_1(s) \\ \vdots \\ \bar{R}_m(s) \end{bmatrix} \tag{6.75}$$

unde $\bar{R}(s)$ este $m \times m$ nesingulară, se poate scrie

$$R(s) = R^*(s)\bar{R}(s). \tag{6.76}$$

Dacă $\bar{T}_c(s) = P(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s)$ este o reprezentare diagonal ireductibilă a unui compensator din $\mathscr{C}_D$, atunci evident

$$\bar{R}_d(s) \triangleq \bar{R}(s)\bar{U}(s) \tag{6.77}$$

este $m \times m$ diagonală și *unică* pînă la o matrice diagonală constantă (cititorul justificînd aceasta ca exercițiu), de unde se poate scrie

$$\bar{U}(s) = \bar{R}^{-1}(s)\bar{R}_d(s). \tag{6.78}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu (6.78), $\bar{T}_c(s)$ se mai poate reprezenta și în forma

$$\bar{T}_c(s) = P(s)\bar{R}^{-1}(s)\bar{R}_d(s)\bar{W}^{-1}(s) \tag{6.79}$$

și în consecință, conform cu (6.76)

$$T_d(s) = T(s)\bar{T}_c(s) = R^*(s)\bar{R}_d(s)\bar{W}^{-1}(s) \tag{6.80}$$

care este proprie. Atunci punînd $\bar{W}(s) = \text{diag}\,(\bar{w}_i(s))$ și $\bar{R}_d(s) = \text{diag}\,(\bar{r}_i(s))$ evident $\partial[\bar{r}_i(s)] \leqslant \partial[\bar{w}_i(s)]$, ceea ce permite alegerea lui $\bar{w}_i(s)$ de forma $\bar{w}_i(s) = \bar{w}_i^*(s)\bar{r}_i(s)$ cu $\bar{w}_i^*(s)$, $i = 1,\ldots,m$, polinoame arbitrare dar de grad fixat, adică $\bar{W}(s)$ se poate alege de forma

$$\bar{W}(s) = \bar{W}^*(s)\bar{R}_d(s) \tag{6.81}$$

unde $\bar{W}^*(s) = \text{diag}\,(\bar{w}_i^*(s))$. Înlocuind (6.81) în (6.79) rezultă în definitiv, ca un caz particular de tip de compensator din $\mathscr{C}_D$,

$$\hat{T}_c(s) \triangleq P(s)\bar{R}^{-1}(s)\bar{W}^{*-1}(s) \tag{6.82}$$

constatîndu-se din

$$P^{-1}(s)\hat{T}_c(s) = \bar{R}^{-1}(s)\bar{W}^{*-1}(s) = (\bar{W}^*(s)\bar{R}(s))^{-1} \tag{6.83}$$

că ordinul matricei raționale $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$ este *minim* și bine precizat,

$$\delta[(\bar{W}^*(s)\bar{R}(s)]^{-1} = \partial[|\bar{R}(s)|] + \bar{\delta} - \partial[|\bar{R}_d(s)|].$$

Se obține astfel, în acest caz particular de decuplare, un răspuns complet la problema D3.

Din punctul de vedere al construcției compensatorului (6.82) obținut prin particularizarea reprezentării diagonal ireductibile se vede imediat că întrucît $\partial_{ci}[(P(s)\bar{U}(s))] = \partial[\bar{w}_i(s)]$, $i = 1, \ldots, m$, gradele polinoamelor $\bar{w}_i^*(s)$ trebuie alese *exact atît cît este necesar ca matricea rațională* $P(s)\bar{R}^{-1}(s)\bar{W}^{*-1}(s)$ *să fie proprie.* Rezultă imediat de aici, procedura efectivă de construcție a lui $\hat{T}_c(s)$ (pe care o va stabili cititorul), rezumîndu-ne la

Exemplul 6.3. Fie

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^{-1} = R(s)P^{-1}(s).$$

Se cere să se decupleze scalar, în circuit închis, sistemul asociat factorizării (prime la dreapta) a lui $T(s)$, astfel încît ordinul realizării prin reacție (extensiunea sistemului rezultant) să fie minim.
Se vede că

$$R(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} = R^*(s)\bar{R}(s).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$P(s)\bar{R}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(s+1)^2(s-2)}{(s-1)^2} & \dfrac{-(s+1)^2}{(s-1)^2} \\ \dfrac{(s+2)^2}{(s-1)^2} & \dfrac{s(s+2)^2}{(s-1)^2} \end{bmatrix}$$

de unde rezultă $\bar{W}^*(s)$ de forma

$$\bar{W}^*(s) = \begin{bmatrix} as+b & 0 \\ 0 & \alpha s+\beta \end{bmatrix}$$

gradele polinoamelor de pe diagonala lui $\bar{W}^*(s)$ fiind alese exact cît este necesar ca $P(s)\bar{R}^{-1}(s)\bar{W}^{*-1}(s)$ să fie proprie.

Observația 6.14. Se constată din (6.83) că polii matricei raționale $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$, adică polii realizării prin reacție, de ordin minim, se compun din zerourile lui $|\bar{R}(s)|$ care sînt fixe și zerourile lui $|\bar{W}^*(s)|$ care sînt alocabile.

În consecință *stabilitatea realizării este condiționată de zerourile lui* $|\bar{R}(s)|$, care se mai numesc și *polii ficși interni* ai decuplării (în circuit închis) și se găsesc, după cum rezultă din (6.76), printre zerourile lui $R(s)$, adică întrucît $T(s)$ este factorizată prim, printre zerourile lui $T(s)$.

Din exemplul 6.3 se vede că polii ficși interni sînt {1,1} adică instabili și în consecință realizarea pin reacție a lui $T_c(s)$ rezultă instabilă. Spre deosebire de sinteza exactă însă, unde $T_d(s)$ este impus în totalitate, în cazul decuplării *polii ficși interni pot altera problema stabilității numai în cazul exigențelor de minimalitate impuse de problema* D3, soluția problemei D2 arătînd că *întotdeauna este posibilă decuplarea în circuit închis simultan cu alocarea arbitrară și în totalitate a polilor*. Nuanțele care diferențiază problemele D2 și D3, adică ordinul de realizare (extensiunea) minim simultan cu alocarea și respectiv ordinul de realizare minim posibil, se justifică prin faptul că $T_d(s)$ *nu este dată în totalitate ci se cere să fie numai bloc diagonală.*

Trecem acum la *modul de abordare al problemei D3 în cazul general de decuplare, menținîndu-se la nivelul clasei* $\tilde{\mathscr{C}}_N$ (ipoteza II).

Pentru aceasta să observăm că în (6.80) $\bar{W}(s)$ a fost ales astfel încît să simplifice cel mai mare divizor diagonal la dreapta al factorizării. Plecînd de la această idee fie $\bar{T}_c(s) = P(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s)$ un compensator în reprezentarea bloc diagonal ireductibilă, unde $\bar{U}(s)$ și $\bar{W}(s)$ au structura dată de (6.42), adică $\bar{U}(s) = [\bar{U}_1(s) \ldots \bar{U}_k(s)]$, $\bar{W}(s) = \text{diag}\,(\bar{W}_i(s))$. Avem atunci

$$T(s)\bar{T}_c(s) = R(s)P^{-1}(s)P(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s) = R(s)\bar{U}(s)\bar{W}^{-1}(s) = R_d(s)\bar{W}^{-1}(s)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$R_d(s) \triangleq R(s)\bar{U}(s) = \text{diag}\,(R_{di}(s)) \tag{6.84}$$

este unică pînă la o matrice unimodulară bloc diagonală.

Punem acum în locul matricelor $\bar{W}_i(s)$, $\bar{W}_i(s) - F_{i0}(s)$ $(\partial_c[F_{i0}(s)] < \partial_c[\bar{W}_i(s)])$ unde $F_{i0}(s)$ simplifică toate zerourile factorizării $R_{di}(s)\bar{W}_i^{-1}(s)$, $i = 1,\ldots,k$ (vezi observaţia 4.12, (4.127)). Rezultă atunci compensatorul

$$\hat{T}_c(s) = P(s)\bar{U}(s)\bar{W}_0^{-1}(s) \tag{6.85}$$

cu

$$\bar{W}_0(s) \triangleq \text{diag}\,(\bar{W}_i(s) - F_{i0}(s)) \tag{6.86}$$

unde $F_{i0}(s)$ se determină după efectuarea lui (6.84). Acest compensator este conceput să simplifice cît mai mult din $R(s)\bar{U}(s)$ şi în acest sens va simplifica (probabil) şi din $\bar{U}(s)$, reducînd cît mai mult cu putinţă ordinul matricii $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$. Vom considera (6.85) un răspuns (evident, în acest caz general, încă incomplet) la problema D3.

Exemplul 6.4. Se dă sistemul asociat factorizării

$$T(s) = \left[\begin{array}{ccc} s-1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & s & s^2 \\ 1 & 0 & s \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} s+3 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & (s+1) \end{array}\right]^{-1} =$$

$$= R(s)P^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c} R_1(s) \\ \hline R_2(s) \end{array}\right] P^{-1}(s)$$

care este primă la dreapta cu $P(s)$ coloană proprie. Se cere să se găsească un compensator $\hat{T}_c(s)$ care decuplează controlabil la ieşire sistemul dat cu $k = 2$, $p_1 = 2$ $p_2 = 2$, astfel încît ordinul matricei raţionale $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$ să fie cît mai mic posibil.

1. Se construiesc bazele minimale $\bar{U}_1(s)$ şi $\bar{U}_2(s)$ pentru Ker $R_2(s)$ şi respectiv Ker $R_1(s)$ rezultînd

$$\bar{U}(s) = [\bar{U}_1(s) \,|\, \bar{U}_2(s)] = \left[\begin{array}{c|cc} -s & 1 & 0 \\ -s & -s+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Se calculează

$$R_d(s) = R(s)\bar{U}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} -s^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -s^2+s & s^2 \\ 0 & 1 & s \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} R_{d1}(s) & 0 \\ \hline 0 & R_{d2}(s) \end{array}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Se calculează

$$[\bar{P}_1(s) \vdots \bar{P}_2(s)] = P(s)[\bar{U}_1(s) \vdots \bar{U}_2(s)] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} -s(s+3) & s+3 & 0 \\ -s(s+2) & -(s+2)(s-1) & 0 \\ s+1 & 0 & (s+1)^2 \end{array}\right]$$

$\bar{P}_1(s)$ și $\bar{P}_2(s)$ rezultînd coloană proprie, respectiv. În consecință gradele coloanelor matricelor $\bar{W}_1(s)$ și $\bar{W}_2(s)$ rezultă și alegem

$$\bar{W}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{W}_1(s) & 0 \\ \hline 0 & \bar{W}_2(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} s^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{array}\right]$$

4. Construim reacțiile $F_{10}(s)$ și $F_{20}(s)$ care simplifică zerourile factorizărilor $R_{d1}(s)\bar{W}_1^{-1}(s)$ și respectiv $R_{d2}(s)\bar{W}_2^{-1}(s)$.
Rezultă

$$F_{10}(s) = 0 \text{ (evident)}$$

și

$$\bar{W}_2(s)R_{d2}^{-1}(s) = M_2(s) + F_{20}(s)R_{d2}^{-1}(s)$$

adică

$$F_{20}(s) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -s+1 & s \end{array}\right]$$

Atunci

$$\bar{W}_0(s) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{W}_1(s) - F_{10}(s) & 0 \\ \hline 0 & \bar{W}_2(s) - F_{20}(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} s^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & s^2 & 0 \\ 0 & s-1 & s^2-s \end{array}\right]$$

adică

$$\hat{T}_c(s) = [\bar{P}_1(s) \vdots \bar{P}_2(s)]\bar{W}_0^{-1}(s).$$

Calculînd $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$ rezultă

$$P^{-1}(s)\hat{T}_c(s) = \bar{U}(s)\bar{W}_0^{-1}(s) = \left[\begin{array}{ccc} -s & 1 & 0 \\ -s & -s+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} s^2 & 0 & -1 \\ 0 & s^2 & -s \\ 0 & s-1 & 0 \end{array}\right]^{-1}$$

Scanned with OKEN Scanner

ultima factorizare din membrul drept obținîndu-se după eliminarea c.m.m.d.c. la dreapta a lui $\bar{U}(s)$ și $\bar{W}_0(s)$. Se vede că numărătorul acestei factorizări este unimodular adică $\bar{W}_0(s)$ a simplificat toate zerourile lui $\bar{U}(s)$ și în consecință ordinul lui $P^{-1}(s)\hat{T}_c(s)$ este cel mai mic posibil.

6.5. DECUPLAREA PRIN REACȚIE DUPĂ STARE

Fie sistemul asociat factorizării $p \times m$ matricei de transfer $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ cu $P(s)$ coloană proprie, unde $R(s)$ este partiționată ca în (6.13) ($R_i(s)$ fiind $p_i \times m$, $i = 1, \ldots, k$). *Problema decuplării prin reacție după stare* constă în găsirea unei legi de comandă

$$u(s) = F(s)z(s) + Gv(s) \tag{6.87}$$

cu $\partial_c[F(s)] < \partial_c[P(s)]$ și G $m \times q$ constantă astfel încît

$$\begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_k(s) \end{bmatrix} (P(s) - F(s))^{-1}G = \begin{bmatrix} T_{d1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{dk}(s) \end{bmatrix} = T_d(s) \tag{6.88}$$

unde $T_{di}(s)$ sînt $p_i \times q_i$ ($T_d(s)$ bloc diagonală) cu $\sum_{i=1}^{k} q_i = q$, *controlabile la ieșire*, și unde q și q_i, $i = 1, \ldots k$, sînt inițial necunoscute și trebuie să rezulte prin rezolvarea problemei.

Ținînd cont de (6.7), (6.87) se mai poate explicita și în

$$u(s) = F(s)z(s) + [G_1 \ldots G_k] \begin{bmatrix} v_1(s) \\ \vdots \\ v_k(s) \end{bmatrix} \tag{6.89}$$

unde G_i sînt $m \times q_i$ constante. Avem atunci

DEFINIȚIA 6.2. Sistemul asociat factorizării $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ cu $P(s)$ coloană proprie, este decuplabil controlabil la ieșire prin reacție după stare, dacă problema de mai sus are o soluție (pentru specificațiile k și p_i, $i = 1, \ldots, k$).

Întrucît stabilirea condițiilor operante de decuplabilitate prin reacție și corespunzător, caracterizarea clasei (6.87) care decuplează, nu este o chestiune pe deplin elucidată decît la nivelul unor formulări greoaie, vom aborda problema decuplării prin reacție după stare printr-o serie de cazuri particulare, care sînt însă deosebit de reprezentative.
Vom începe cu

Decuplarea prin reacție, după stare cu G nesingulară.

Întrucît legea de comandă (6.87) cu G nesingulară invariază controlabilitatea la ieșire este clar că $T(s)$ *va fi necesar să fie presupusă de la început controlabilă la ieșire.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum pentru fiecare $T_i(s) = R_i(s)P^{-1}(s)$ *interactorul* (vezi definiția 4.10 și teorema 4.7)

$$I_i(s) = \begin{bmatrix} S_{ia}M_{ia}(s)H_{ia} \\ \hat{L}_{ib}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r_i \\ \} p_i - r_i \end{matrix} \tag{6.90}$$

($I_i(s)$ nesingulară), $i = 1, \ldots, k$ Avem atunci

$$I_i(s)\,T_i(s) = \begin{matrix} r_i \{ \\ p_i - r_i \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} S_{ia}M_{ia}(s)H_{ia}R_i(s) \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1}(s) \tag{6.91}$$

și

$$\lim_{s\to\infty} I_i(s)T_i(s) = \begin{bmatrix} \bar{D}_{ia} \\ 0 \end{bmatrix} \} r_i = D_i \tag{6.92}$$

unde $\bar{D}_{ia}$ este $r_i \times m$ și de rang maximal linie, rar $r_i \triangleq \rho[T_i(s)]$, $r_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$ întrucît $T(s)$ este controlabilă la ieșire. Fie definită

$$I(s) \triangleq \text{diag}\ (I_i(s)) \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{6.93}$$

Atunci

$$\lim_{s\to\infty} I(s)T(s) = \lim_{s\to\infty} \begin{bmatrix} I_1(s)\,T_1(s) \\ \vdots \\ I_k(s)T_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_k \end{bmatrix} = \begin{matrix} p_1 \{ \\ \\ p_k \{ \end{matrix} \begin{bmatrix} D_{1a} \\ 0 \\ \vdots \\ D_{ka} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r_1 \\ \\ \\ \\ \} r_k \end{matrix} \triangleq D. \tag{6.94}$$

Presupunem acum că legea de comandă (6.87) cu G nesingulară *decuplează*, adică (6.88) este adevărată. Avem atunci din (6.88)

$$\lim_{s\to\infty} I(s)T(s)G = \lim_{s\to\infty} I(s)R(s)P^{-1}(s)G =$$

$$= \lim_{s\to\infty} I(s)R(s)\,(P(s) - F(s))^{-1}G = \lim_{s\to\infty} I(s)T_d(s) \tag{6.95}$$

relație care arată că sînt bine definite matricele constante

$$\lim_{s\to\infty} I_i(s)\,T_{di}(S) = D_{di} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{dia} \\ 0 \end{bmatrix} \} r_i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{6.96}$$

Avem atunci

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_k \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} D_{d1} & 0 \ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \ldots D_{dk} \end{bmatrix} \tag{6.97}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se vede imediat din egalitățile evidente $D_i G = [D_{di} \vdots 0]$ că rang $D_{di} = \text{rang } D_i = r_i$, $i = 1, \ldots, k$. Cum matricea din membrul drept al lui (6.97), datorită structurii ei, are rangul $r \triangleq \sum_{i=1}^{k} \text{rang } D_{di} = \sum_{i=1}^{k} r_i$, rezultă în definitiv, că

$$\text{rang } D = \text{rang} \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} r_i = r. \tag{6.98}$$

Din (6.92) se vede de asemenea că

$$\rho[T(s)] = r. \tag{6.99}$$

Se poate atunci conchide din (6.94), (6.98) și (6.99) că $I(s)$ *definit prin (6.93) este un interactor pentru* $T(s)$.
Avem atunci

TEOREMA 6.8. *Sistemul asociat factorizării* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ ($T(s)$ *controlabilă la ieșire,* $P(s)$ *coloană proprie) este decuplabil printr-o lege de comandă (6.87) cu* G *nesingulară, dacă și numai dacă* $I(s)$ *definit prin (6.93) (unde* $I_i(s)$ *conțin specificațiile* p_i*) este un interactor pentru* $T(s)$ *sau echivalent, dacă și numai dacă condiția de rang (6.98) este îndeplinită.*

Demonstrație. Necesitatea rezultă din dezvoltările de mai sus. Pentru suficiență vom construi legea de comandă care decuplează, presupunînd (6.98) adevărată.
Introducem $r \times m$ matricea

$$\bar{D}_a \triangleq \begin{bmatrix} \bar{D}_{1a} \\ \vdots \\ \bar{D}_{ka} \end{bmatrix} \tag{6.100}$$

care conform cu (6.92) și (6.98) este de *rang maximal linie* egal cu r. Se poate atunci scrie

$$\bar{D}_a = [I_r \quad 0]S \tag{6.101}$$

unde S este $m \times m$ nesingulară, evident de forma

$$S = \begin{bmatrix} \bar{D}_a \\ \cdots\cdots \\ \bar{S} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \\ \} m - r \end{matrix} \tag{6.102}$$

Fie acum $m \times m$ matricea

$$\hat{R}_m(s) \triangleq \begin{bmatrix} S_{1a} M_{1a}(s) H_{1a} R_1(s) \\ \vdots \\ S_{ka} M_{ka}(s) H_{ka} R_k(s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{S} P(s) \end{bmatrix} \tag{6.103}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem atunci din (6.91), (6.92) și (6.100)

$$\lim_{s\to\infty} \hat{R}_m(s)P^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c} \bar{D}_a \\ \hline \bar{S} \end{array}\right] = S \tag{6.104}$$

ceea ce arată că $\hat{R}_m(s)P^{-1}(s)$ este nesingulară și proprie. Avem în consecință scrierea unică

$$P(s)\hat{R}_m^{-1}(s) = S^{-1} + F(s)\hat{R}_m^{-1}(s) \tag{6.105}$$

cu

$$\partial_c[F(s)] < \partial_c[\hat{R}_m(s)] = \partial_c[P(s)]. \tag{6.106}$$

Atunci, cu (6.106)

$$u(s) = F(s)z(s) + S^{-1}v(s) \tag{6.107}$$

definește o lege de comandă. Arătăm că (6.107) decuplează. Într-adevăr, din (6.105) rezultă

$$R(s)(P(s) - F(s))^{-1}S^{-1} = R(s)\hat{R}_m^{-1}(s) \tag{6.108}$$

sau încă

$$I(s)R(s)\hat{R}_m^{-1}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} Ir_1 & 0 & 0 & \\ 0 & & & \\ \hline 0 & \ddots & 0 & \\ \hline 0 & 0 & Ir_k & 0 \\ & & 0 & \end{array}\right] \begin{array}{l} \} p_1 \\ \\ \\ \} p_k \end{array} \tag{6.109}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{r} \qquad \underbrace{\quad}_{m-r}$$

Cum, $I(s)$ este bloc diagonală și nesingulară, rezultă din (6.108) și (6.109) că $R(s)(P(s) - F(s))^{-1}S^{-1}$ este bloc diagonală, blocurile fiind $p_1 \times r_1, \ldots, p_{k-1} \times r_{k-1}$ și $p_k \times (r_k + m - r)$. Teorema este astfel complet demonstrată. Cazul decuplării prin legea de comandă (6.87) cu G nesingulară ne permite să abordăm

Decuplarea prin reacție după stare cu $k = m$.

Presupunem că legea de comandă (6.87) cu G oarecare decuplează controlabil la ieșire cu $k=m$. Întrucît sigur G se poate partiționa în

$$G = [G_1 \ldots G_m] \quad \text{cu} \quad G_i \neq 0, \; i = 1, \ldots, m \tag{6.110}$$

rezultă că G trebuie să aibă mai multe coloane decît linii și deci rang $G \leqslant m$. Să observăm acum că fiecare G_i trebuie să conțină totdeauna o coloană a oricărei baze de coloane a lui G. Într-adevăr, dacă aceasta nu este adevărat, există cel puțin un G_i care nu conține nici o coloană a unei baze de coloane a lui G. Fie, pentru simplificarea notațiilor $i = m$. Atunci se poate scrie sigur

$$G_m = -G_1K_1 - G_2K_2 - \ldots - G_{m-1}K_{m-1} \tag{6.111}$$

cu K_i matrici adecvat alese.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum intrarea

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ v_{m-1} \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} K_1 v_m \\ \cdots \\ K_2 v_m \\ \cdots \\ \vdots \\ K_{m-1} v_m \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix} \tag{6.112}$$

cu v_m arbitrară. Atunci din (6.111) rezultă că

$$Gv = 0 \tag{6.113}$$

oricare ar fi v_m. Aceasta contrazice însă controlabilitatea la ieșire a decuplării. În consecință, o bază de coloane a lui G are cel puțin m coloane și cum rang $G \leqslant m$, rezultă că

$$\text{rang } G = m. \tag{6.114}$$

Totodată rezultă imediat din cele de mai sus că dacă legea (6.87) decuplează controlabil la ieșire, se poate înlocui G cu o matrice nesingulară. *Așadar dacă sistemul este decuplabil controlabil la ieșire cu $k = m$ prin reacție după stare el poate fi decuplat cu G nesingulară.*

Cu alte cuvinte *cazul de decuplabilitate cu $k=m$ este încadrabil în cazul tratat anterior.* Atunci dacă sistemul este decuplabil controlabil la ieșire cu $k=m$, conform teoremei 6.8 rang $\bar{D}_a = \sum_{i=1}^{m} \text{rang } \bar{D}_{ia}$, $\bar{D}_a$ fiind de rang maximal linie egal cu m. Cum D_{ia} sînt de rang maximal linie rezultă că fiecare $\bar{D}_{ia}$ se reduce la o linie, iar $\bar{D}_a$ este *nesingulară.* Avem atunci direct din teorema 6.8, în particular,

TEOREMA 6.9. *Sistemul asociat factorizării $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$, ($P(s)$ coloană proprie) este decuplabil controlabil la ieșire prin reacție după stare cu $k = m$ (în particular G nesingulară) dacă și numai dacă $T(s)$ este controlabilă la ieșire și $\bar{D}_a$, definită prin (6.100), este nesingulară.*

Fie acum $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ decuplabilă controlabil la ieșire prin reacție după stare, cu $k=m$. Întrucît $\bar{D}_{ia}$ sînt $1 \times m$ (rang $\bar{D}_{ia} = 1$) rezultă (vezi (6.91), (6.92)) că $H_{ia}R_i(s)$ sînt $1 \times m$ ($\rho[H_{ia}R_i(s)] = 1$) și deci $S_{ia}M_{ia}(s)$ sînt *polinoame.* Fie

$$f_i \triangleq \partial[S_{ia}M_{ia}(s)], \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.115}$$

De asemenea, din nesingularitatea matricii $\bar{D}_a$ rezultă că $\bar{S}=0$ (vezi (6.102)) și în consecință (6.103) devine

$$R_m(s) = \begin{bmatrix} S_{1a}\, M_{1a}(s)\, H_{1a}\, R_1(s) \\ \vdots \\ S_{ma} M_{ma}(s) H_{ma}\, R_m(s) \end{bmatrix} \tag{6.116}$$

Scanned with OKEN Scanner

$m \times m$ nesingulară. Fie acum $u(s) = F(s)z(s) + Gv(s)$ cu G nesingulară, o lege de comandă care decuplează (controlabil la ieșire). Atunci din (6.97) se obține

$$\bar{D}_a G = \Lambda \qquad (G = \bar{D}_a^{-1}\Lambda) \tag{6.117}$$

unde Λ este o $m \times m$ matricea diagonală și nesingulară, care rezultă direct din membrul drept al lui (6.97). De asemenea din produsul $I(s)R(s)(P(s) - F(s))^{-1}G$, cu $I(s)$ definită prin (6.93), rezultă ținînd cont de (6.88) și (6.96),

$$\hat{R}_m(s)(P(s) - F(s))^{-1}G = \operatorname{diag}(S_{ia} M_{ia}(s)) \operatorname{diag}(T_{dia}(s)) \tag{6.118}$$

unde $T_{dia}(s) \triangleq H_{ia} T_{di}(s)$ sînt fracții raționale, $i = 1, \ldots, m$.

Atunci ținînd cont de (6.95), (6.96) și (6.11) rezultă că

$$T_{dia}(s) \doteq \lambda_i \frac{r_i(s)}{p_i(s)}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{6.119}$$

unde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ iar $r_i(s)$ și $p_i(s)$ sînt monice și coprime cu

$$\partial[p_i(s)] - \partial[r_i(s)] = f_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.120}$$

Atunci din (6.118) se obține

$$R_a(s)(P(s) - F(s))^{-1}G = \Lambda \operatorname{diag}\left(\frac{r_i(s)}{p_i(s)}\right) \tag{6.121}$$

unde

$$R_a(s) \triangleq \begin{bmatrix} H_{1a} R_1(s) \\ \vdots \\ H_{ma} R_m(s) \end{bmatrix} \tag{6.122}$$

și în consecință, ținînd cont de (6.117) rezultă din (6.121)

$$F(s) = P(s) - \bar{D}_a^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{p_i(s)}{r_i(s)}\right) R_a(s). \tag{6.123}$$

Întrucît $p_i(s)$ și $r_i(s)$ sînt coprime, diag $(r_i(s))$ este un *divizor diagonal la stînga a lui* $R_a(s)$. Avem astfel imediat

TEOREMA 6.10. *Fie sistemul asociat factorizării* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$, *(*$P(s)$ *coloană proprie), decuplabil controlabil la ieșire prin reacție după stare cu* $k = m$. *Atunci clasa legilor de comandă (6.87) cu* G *nesingulară care decuplează cu* $k = m$ *este dată de (6.117) și (6.123), unde* Λ *este o matrice diagonală nesingulară arbitrară, diag* $(r_i(s))$ *este orice divizor diagonal monic la stînga al lui* $R_a(s)$, *iar* $p_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$ *sînt polinoame monice arbitrare cu* $p_i(s)$ *și* $r_i(s)$ *coprime satisfăcînd (6.120).*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se restrînge cazul de față la $k=m=p$, atunci este clar că $H_{ta}=1$, iar f_i definiți prin (6.115) sînt *unic determinați*, adică $I(s)$ se poate lua de forma $I(s) = \text{diag}\,(s^{f_i})$ unde f_i sînt acei întregi pentru care $\lim s^{f_i} T_i(s) = \text{ct.} \neq 0$, $i=1,\ldots,p=m$. În consecință (6.122) devine $R_a(s) = R(s)$ iar (6.100) $\bar{D}_a = D$ (vezi (6.94) Avem atunci imediat

TEOREMA 6.11. *Sistemul asociat factorizării* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ ($P(s)$ *coloană proprie*) *este decuplabil controlabil la ieșire prin reacție după stare cu* G *nesingulară și* $k=m=p$, *dacă și numai dacă matricea*

$$D \triangleq \lim_{s\to\infty} \text{diag}\,(s^{f_i}) T(s)$$

este nesingulară, unde f_i *sînt unic determinați. Mai mult, clasa legilor de comandă care decuplează în acest caz este*

$$G = D^{-1}\Lambda \tag{6.124}$$

$$F(s) = P(s) - D^{-1}\,\text{diag}\left(\frac{p_i(s)}{r_i(s)}\right) R(s) \tag{6.125}$$

unde Λ *este o matrice diagonală nesingulară arbitrară, diag* $(r_i(s))$ *este orice divizor diagonal monic la stînga a lui* $R(s)$, *iar* $p_i(s)$ *sînt polinoame monice arbitrare cu* $p_i(s)$ *și* $r_i(s)$ *coprime satisfăcînd relația de grad* $\partial[p_i(s)] - \partial[r_i(s)] = f_i$, $i = 1, \ldots, m = p$.

Observația 6.15. Se constată că nesingularitatea lui D atrage după sine faptul că $T(s)$ este nesingulară și în consecință condiția de controlabilitate la ieșire asupra lui $T(s)$ nu este necesară.

De amintit că teorema 6.11 reprezintă istoricește prima soluție a problemei decuplării și anume *decuplarea scalară prin reacție după stare cu* G *nesingulară.*

Revenind din nou la cazul $k=m$, fie sistemul asociat factorizării $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ ($P(s)$ coloană proprie) decuplabil controlabil la ieșire prin lege de comandă după stare cu $k=m$. Avem atunci din (6.123)

$$P(s) - F(s) = \bar{D}_a^{-1}\,\text{diag}\left(\frac{p_i(s)}{r_i(s)}\right) R_a(s). \tag{6.126}$$

Fie acum diag $(\bar{r}_i(s))$ c.m.m.d.c. diagonal la stînga al lui $R_a(s)$ și fie

$$\bar{R}(s) \triangleq \text{diag}\,(\bar{r}_i(s))^{-1} R_a(s). \tag{6.127}$$

Atunci $\bar{R}(s)$ este unic pînă la o matrice diagonală nesingulară constantă și coincide cu $\bar{R}(s)$ introdus prin (6.75), aceasta rezultînd imediat din faptul că $\rho[R_i(s)] = 1$, $i = 1,\ldots,m$. Rezultă atunci direct din (6.126) și din teorema 6.10,

TEOREMA 6.12. *Fie sistemul asociat factorizării* $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ ($P(s)$ *coloană proprie*) *decuplabil controlabil la ieșire cu* $k=m$, *prin reacție după stare. Atunci polii ficși, față de orice lege de comandă cu* G *nesingulară*

Scanned with OKEN Scanner

care decuplează cu $k=m$, ai sistemului rezultant, sînt zerourile lui $\bar{R}(s)$, fiind posibil a fi alocați în plus cel mult $\sum_{i=1}^{m}(f_i+\partial_c[\bar{r}_i(s)])$ *poli.*

Exemplul 6.5. Fie sistemul asociat factorizării

$$T(s)=\begin{bmatrix}s^2+s & s\\ s+2 & s^2+2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^3 & 0\\ 0 & s^3+1\end{bmatrix}^{-1}=R(s)P^{-1}(s).$$

Se cere să se decupleze acest sistem controlabil la ieșire cu $k=p=m=2$ prin reacție după stare cu G nesingulară (decuplare scalară).

Se vede imediat că

$$R(s)=\operatorname{diag}(\bar{r}_i(s))\bar{R}(s)=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 1 & s\end{bmatrix}.$$

De asemenea

$$\lim_{s\to\infty}\operatorname{diag}(s^{f_i})T(s)=\lim_{s\to\infty}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+s & s\\ s+2 & s^2+2s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^3 & 0\\ 0 & s^3+1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=D,\ \text{nesingulară}$$

$f_1=f_2=1$. Așadar sistemul se poate decupla. În consecință

$$G=\begin{bmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{bmatrix}$$

cu $g_1, g_2\neq 0$, arbitrare, iar

$$F(s)=P(s)-D^{-1}\operatorname{diag}(p_i(s))\bar{R}(s)=$$

$$=\begin{bmatrix}s^3 & 0\\ 0 & s^3+1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_1(s) & 0\\ 0 & p_2(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 1 & s\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}s^3-p_1(s)(s+1) & -p_1(s)\\ -p_2(s) & s^3+1-sp_2(s)\end{bmatrix}$$

unde $p_1(s)$ și $p_2(s)$ sînt monice arbitrare cu $\partial[p_1(s)]=f_1+\partial[\bar{r}_1(s)]=2$, $\partial[p_2(s)]=f_2+\partial[\bar{r}_2(s)]=2$. Polii ficși sînt zerourile lui $|\bar{R}(s)|=s^2+s-1$, fiind posibil să fie alocați $\partial[p_1(s)]+\partial[p_2(s)]=4$ poli, adică din $\partial[|P(s)|]=6$ poli, 4 sînt alocabili și 2 ficși.

O condiție de suficiență pentru decuplarea prin reacție după stare fără ipoteza de nesingularitate a matricii G.

Presupunem condiția de rang (6.98) îndeplinită adică $\bar{D}_a$, definită prin (6.100), *este de rang maximal linie.* Pentru fiecare $i=1,\dots k$, notăm cu $\tilde{D}_{ia}$ matricea obținută din $\bar{D}_a$ prin suprimarea bloc liniei $\bar{D}_{ia}$. Fie acum matricele G_i, $i=1,\dots k$ astfel alese încît

$$\operatorname{Im}G_i=\operatorname{Ker}\tilde{D}_{ia}\qquad(6.128)$$

Scanned with OKEN Scanner

și fie construită matricea

$$G \triangleq [G_1 \ldots G_k]. \tag{6.129}$$

Notăm, pentru fiecare $i=1,\ldots,k$, cu $\tilde{G}_i$ matricea obținută din G prin suprimarea bloc coloanei G_i. Atunci, datorită maximalității rangului lui $\bar{D}_a$ rezultă că

$$\operatorname{Im} \tilde{G}_i = \operatorname{Ker} \bar{D}_{ia}, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{6.130}$$

În consecință

$$\tilde{G}_i = \bar{M}_i H_i \tag{6.131}$$

unde $\bar{M}_i$ se definește prin (4.115) corespunzător reproductorului asociat factorizării $R_i(s)P^{-1}(s)$, iar H_i este nesingulară. Presupunem acum că există un $F(s)$ astfel încît legea de comandă $u(s) = F(s)z(s) + Gv(s)$, cu G construit prin (6.128), (6.129) *decuplează* sistemul asociat factorizări $R(s)P^{-1}(s)$, adică, ținînd cont de (6.131),

$$R_i(s)(P(s) - F(s))^{-1}\bar{M}_i = 0, \quad i = 1,\ldots,k. \tag{6.132}$$

Este evident că legea considerată va decupla controlabil la ieșire dacă

(i) $\tilde{R}_i(s)(P(s) - F(s))^{-1}\bar{M}_i$ sînt controlabile la ieșire cu $i = 1,\ldots,k$.

Relația (6.132) arată că $u(s) = F(s)z(s) + \bar{M}_i v_i(s)$ nulează ieșirea sistemului asociat factorizării $R_i(s)P^{-1}(s)$ pentru fiecare $i = 1,\ldots,k$. Atunci conform teoremei 4.8.

$$F(s) = F_{i0}(s) + [M_i \vdots \bar{M}_i]\tilde{F}_i(s) \tag{6.133}$$

unde

$$M_i \triangleq S_i^{-1}\begin{bmatrix} I_{ri} \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.134}$$

iar

$$\tilde{F}_i(s) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{iaa}(s) & 0 \\ \tilde{F}_{iba}(s) & \tilde{F}_{ibb}(s) \end{bmatrix} \tilde{U}_i^{-1}(s) \tag{6.135}$$

cu $\tilde{U}_i(s)$ unimodulară (vezi (4.159)).
Ținînd cont de (6.133) și (6.135) avem

$$\tilde{R}_i(s)(P(s) - F(s))^{-1}\bar{M}_i = \tilde{R}_i(s)[P(s) - F_{i0}(s) - [M_i \vdots \bar{M}_i]\tilde{F}_i(s)]^{-1}\bar{M}_i =$$

$$= \tilde{R}_i(s)[M_i(s)\hat{R}_{i0}(s) - [M_i \vdots \bar{M}_i]\tilde{F}_i(s)]^{-1}\bar{M}_i =$$

$$= \tilde{R}_i(s)\tilde{U}_i(s)\begin{bmatrix} R_{iaa}(s) - \tilde{F}_{iaa}(s) & 0 \\ \bar{S}_i P_{ia}(s) V_{ia}(s) - \tilde{F}_{iba}(s) & \bar{S}_i\bar{P}_i(s) - \tilde{F}_{ibb}(s) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{m-r} \end{bmatrix} =$$

$$= \bar{\tilde{R}}_i(s)(\bar{S}_i\bar{P}_i(s) - \tilde{F}_{ibb}(s))^{-1} \tag{6.136}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\widetilde{R}_i(s)\widetilde{U}_i(s) \triangleq [\,? : \underbrace{\overline{\overline{R}}_i(s)}_{m-r}] \tag{6.137}$$

iar

$$\partial_c[\widetilde{F}_{ibb}(s)] < \partial_c[\bar{S}_i\bar{P}_i(s)]. \tag{6.138}$$

Rezultă imediat

LEMA 6.3 Dacă (6.89) este satisfăcută, atunci condiția (i) este îndeplinită dacă și numai dacă

(ii) $\widetilde{R}_i(s)(P(s) - F_{i0}(s))^{-1}\bar{M}_i$ sînt controlabile la ieșire cu $i=1, \ldots k$.

Demonstrație. Reluînd calculul de mai sus rezultă

$$\widetilde{R}_i(s)(P(s) - F_{i0}(s))^{-1}\bar{M}_i = \overline{\widetilde{R}}_i(s)(\bar{S}_i\bar{P}_i(s))^{-1} \tag{6.139}$$

de unde ținînd cont de (6.136) și (6.138) rezultă lema.
Avem atunci

TEOREMA 6.13. *Presupunem condiția de rang (6.89) indeplinită. Atunci, dacă condiția* (ii) *din lema 6.3 este satisfăcută, legea de comandă* $u(s) = F(s)z(s) + Gv(s)$ *cu* G *construită prin (6.128), (6.129) și* $F(s)$ *construită prin* (6.105) *decuplează controlabil la ieșire.*

Demonstrația, revine la verificarea condiției (6.132) și a condiției (i). Condiția (6.132) rezultă imediat din demonstrația teoremei 6.8, iar condiția (i) din lema 6.3.

Bibliografie

6.1. W. M. Wonham, A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach.* SIAM JC, **8**, Feb. (1970).
6.2. A. S. Morse, W. M. Wonham, *Decoupling and pole assignment by dynamic compensation.* SIAM JC, **18**, Aug. (1970).
6.3. W. A. Wolovich, P. L. Falb, *On the structure of multivariable systems.* SIAM JC, **7**, Aug. (1969).
6.4. Yuan J. S., C. *Structural instability of a class of decoupling solutions.* IEEE Trans., **AC-22**, 5. Oct. (1977).
6.5. Alonso-Concheiro. *Decoupling and parameter variations.* IEEE Trans. **AC-21**, 5, Oct. (1976).
6.6. M. M. Bayoumi, T. L. Duffield, *Output feedback decoupling and pole placement in linear time-invariant systems.* IEEE Trans. **AC-22**, 2, April (1977).
6.7. M. A. Bagoury, M. M. Bayoumy, *Decoupling of multivariable systems using output feedback.* IEEE Trans., **AC-22**, 2, April (1977).
6.8. S. H. Davison, S. H. Wang, *Design of decoupled control systems : a frequency domain approach.* In. J. Contr., **21**, 4 (1975).
6.9. W. A. Wolovich, *Output feedback decoupling.* IEE Trans., **AC-20**, 2, April (1975).
6.10. M.E. Warren, S. K. Mitter, *A necessary condition for decoupling multivariable systems.* Int. J. Control, **21**, 2 (1975).
6.11. P. K. Sinha, *Controllability, observability and decoupling of linear multivariable systems.* Int. J. Contr., **26**, 4 (1977).
6.12. W. A. Wolovich, *Linear multivariable systems.* Springer Verlag, New York, 1974.
6.13. L. M. Sylverman, H. J. Payne, *Input-output structure of linear systems with applications to the decoupling problems.* SIAM JC, **9**, May (1971).
6.14. E. Fabian, W. M. Wonham, *Decoupling and data sensitivity.* IEEE Trans. **AC-20**, 3, June (1975).
6.15. Man-Feng Chang, I. B. Rhodes, *Disturbance localization in linear systems with simultaneously decoupling, pole assignement, or stabilization.* IEEE Trans., **AC-20**, 4, Aug. (1975).

Scanned with OKEN Scanner

Elemente de algebră

Anexa de faţă îşi propune să prezinte cititorului principalele rezultate din algebra abstractă la care apelează o serie de construcţii formale sau metode de calcul dezvoltate în capitolele cărţii.

În acest scop, conţinutul anexei este structurat în trei părţi : *elemente de teoria structurilor algebrice, teoria matricilor polinomiale şi a matricilor raţionale, elemente de teoria subspaţiilor invariante şi a reprezentărilor canonice.*

În prima parte se definesc şi se exemplifică principalele structuri algebrice (grupuri, inele, module, spaţii liniare), împreună cu rezultatele fundamentale legate de aceste noţiuni. În partea a doua se dezvoltă teoria şi metodica de calcul specifică matricilor polinomiale şi raţionale, ca instrument esenţial în abordarea capitolelor 3,4, 5 şi 6 ale cărţii. Partea a treia prezintă, în limbajul compact al teoriei modulelor, principalele rezultate din algebra liniară, legate în special de teoria subspaţiilor invariante şi a formelor canonice asociate unei matrici reale pătrate. În fond, ultimele două părţi intenţionează să familiarizeze cititorul cu cele două tipuri de abordări formale actuale din teoria sistemelor liniare, primul legat de reprezentarea prin spaţiul stărilor, avînd ca suport matematic teoria subspaţiilor invariante din algebra liniară, al doilea, legat de reprezentările prin matrici de transfer şi care uzează esenţial de teoria matricilor polinomiale şi raţionale. Pentru aprofundări matematice de detalii legate de conţinutul anexei cît şi de alte dezvoltări colaterale se recomandă cititorului [A.1].

A.1. ELEMENTE DE TEORIA STRUCTURILOR ALGEBRICE

DEFINIŢIA 1. O mulţime nevidă G pe care s-a introdus o operaţie (algebrică) în sensul că pentru orice $x, y \in G$ se defineşte $(x, y) \mapsto x + y \in G$ (numită adunare) sau $(x, y) \mapsto xy \in G$ (numită înmulţire) cu proprietăţile :

— pentru adunare :

(i) $x + (y+z) = (x+y)+z$ (asociativitate)

(ii) există un element în G notat 0 şi numit *elementul nul*, astfel încît

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(iii) pentru orice x există un element în G notat $-x$ şi numit *opusul* lui x, astfel încît

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau,

— pentru înmulțire :

(j) $x(yz) = (xy)z$ (asociativitate)

(jj) există un element în G notat 1 și numit *elementul unitate* astfel încît

$$x1 = 1x = x$$

(jjj) pentru orice x există un element în G notat x^{-1} și numit *inversul* lui x, astfel încît

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

se numește grup aditiv respectiv multiplicativ. Dacă

(iiii) $x + y = y + x$ (comutativitate)

respectiv

(jjjj) $xy = yx$ (comutativitate)

grupul se numește comutativ sau abelian.

Dacă pe G, operația de adunare (înmulțire) are numai proprietatea (i) ((j)), G se numește *semigrup* aditiv (multiplicativ). Dacă operația de adunare (înmulțire) are și proprietatea (ii) ((jj)), semigrupul se numește cu element nul (unitate sau unitar). Dacă semigrupul are proprietatea (iiii) ((jjjj)) el se numește comutativ.

Se obișnuiește să se mai spună că operația de adunare (înmulțire) *induce* pe G o structură de grup, respectiv semigrup aditiv (multiplicativ).

O mulțime $G' \subset G$ se numește subgrup (al grupului G) dacă G' este grup față de operația definită pe G sau cum se mai spune, este stabil față de operația definită pe G.

Exemplul 1. Mulțimea numerelor întregi Z este grup (aditiv) comutativ față de adunarea numerelor întregi. Orice subgrup a lui Z este de forma nZ (adică este format din mulțimea multiplilor întregi ai unui întreg n). Mulțimea $n \times n$-matricilor reale pătrate nesingulare formează un grup (multiplicativ și necomutativ) față de înmulțirea matricială.

PROPOZIȚIA 1. Fie G un grup aditiv (multiplicativ) și $G' \subset G$. Atunci G' este subgrup al lui G, dacă și numai dacă, pentru orice $x, y \in G'$, $x - y \in G'$ ($xy^{-1} \in G'$).

Demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului.

DEFINIȚIA 2. O mulțime nevidă A se numește inel, dacă pe ea s-au definit două operații, prima de adunare inducînd pe A o structură de grup aditiv comutativ, iar a doua de înmulțire, inducînd pe A o structură de semigrup multiplicativ, cele două operații fiind legate prin dublă distributivitate față de sumă, adică

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx.$$

Dacă semigrupul multiplicativ are element unitate, inelul se numește unitar, iar dacă este comutativ inelul se numește comutativ.

Cititorul poate demonstra că $x0 = 0x = 0$.

Dacă inelul A conține un singur element (deci numai pe 0) el se numește *nul*, iar dacă conține cel puțin două elemente, se numește *nenul*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie A un inel și $a \in A$ cu $a \neq 0$. Dacă există $b \in A$, $b \neq 0$, astfel încît $ab = 0$ ($ba = 0$) a se numește un *divizor* la stînga (dreapta) *al lui zero*.

Un inel nenul, unitar și comutativ fără divizori ai lui zero se numește inel integru.

DEFINIȚIA 3. Fie A un inel și $I \subset A$. I se numește ideal sting (drept) al lui A dacă

a) I este subgrup al grupului aditiv, adică $\forall a, b \in I$, avem $a-b \in I$, și

b) $(\forall)\ \alpha \in A$ și $a \in I$ atunci $\alpha a \in I$ ($a\alpha \in I$), ceea ce se mai notează și $AI \subset I$ ($IA \subset I$).

Un ideal I care este simultan stîng și drept se numește bilateral. În inelele comutative toate idealele sînt bilaterale.

DEFINIȚIA 4. Fie A un inel unitar și I un ideal sting (drept). Dacă există $a \in I$, astfel încît $I = Aa$ (aA), idealul se numește principal. Un inel în care toate idealele sînt principale se numește inel principal.

Fie $R[s]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de variabilă (sau nedeterminată) s, elementul generic notîndu-se $p(s)$, adică $p(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{q-1}s^{q-1} + \alpha_q s^q$ cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (mulțimea numerelor reale). Se notează cu $\partial[p(s)]$ gradul polinomului $p(s)$.

Față de adunarea și înmulțirea uzuală a polinoamelor, $\mathbb{R}[s]$ este un *inel integru* (cititorul poate verifica această afirmație ca exercițiu). Avem atunci :

TEOREMA 1. $\mathbb{R}[s]$ *este un inel principal.*

Demonstrație. Fie $I \subset \mathbb{R}[s]$ un ideal. Dacă $I = \{0\}$ atunci, evident $I = R[s]\,0$. Fie acum $I \neq 0$ și fie Δ mulțimea gradelor polinoamelor *nenule* din I. Δ fiind o mulțime de numere întregi și nenegative are sigur un cel mai mic element. Fie acesta $\delta_0 \geqslant 0$ și fie $p_0(s) \in I$ cu $p_0(s) \neq 0$, pentru care $\partial[p_0(s)] = \delta_0$. Atunci $I = \mathbb{R}[s]p_0(s)$. Într-adevăr, întrucît I este ideal, $\mathbb{R}[s]p_0(s) \subset I$. Să arătăm și incluziunea inversă. Fie $p(s) \in I$. Atunci sau $p(s) = 0$ sau $\partial[p(s)] \geqslant \delta_0 = \partial[p_0(s)]$ și în consecință $p(s)$ se poate împărți la $p_0(s)$ rezultînd $p(s) = m(s)p_0(s) + r(s)$ unde $\partial[r(s)] < \partial[p_0(s)]$. Cum I este ideal, $m(s)p_0(s) \in I$, de unde $r(s) = p(s) - m(s)p_0(s) \in I$, din același motiv. Există, așadar, în I polinomul $r(s)$ cu $\partial[r(s)] < \delta_0$, deci $\partial[r(s)]$ nu poate fi în Δ. Atunci sigur $r(s) = 0$, de unde $p(s) = m(s)p_0(s)$, deci $p(s) \in \mathbb{R}[s]p_0(s)$, adică $I \subset R[s]p_0(s)$ și teorema este demonstrată.

Vom spune că $p(s)$ *divide* $q(s)$, notîndu-se $p(s)\,|\,q(s)$, dacă există $d(s)$ astfel încît $q(s) = p(s)d(s)$, în care caz se mai spune că $p(s)$ sau $d(s)$) este un divizor al lui $q(s)$, sau că $q(s)$ este un multiplu al lui $p(s)$ (sau $d(s)$). Dacă $p(s)\,|\,q(s)$ și $q(s)\,|\,p(s)$ cele două polinoame se numesc asociate în divizibilitate. Un polinom $p(s) \neq 0$ se numește *monic* dacă coeficientul termenului de grad maxim numit și *coeficientul gradului*, este 1. Dacă $p(s)$ și $q(s)$ sînt monice și asociate în divizibilitatea ele sînt egale.

Fie $p(s)$ și $q(s)$ două polinoame. $d(s)$ este un *divizor comun* al lui $p(s)$ și $q(s)$ dacă $d(s)\,|\,p(s)$ și $d(s)\,|\,q(s)$. $d(s)$ este un cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al lui $p(s)$ și $q(s)$, dacă este un divizor comun al lui $p(s)$ și $q(s)$ și este multiplu al oricărui alt divizor comun al celor două polinoame. Toți c.m.m.d.c. ai lui $p(s)$ și $q(s)$ sînt asociați în divizibilitate existînd un singur c.m.m.d.c. monic al lor. Spunem că $m(s)$ este un *multiplu comun* al lui $p(s)$ și $q(s)$ dacă $p(s)\,|\,m(s)$ și $q(s)\,|\,m(s)$. $m(s)$ este un cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c) al lui $p(s)$ și $q(s)$ dacă este multiplu comun al lor și

Scanned with OKEN Scanner

divide oricare alt multiplu comun al acestora. Toţi c.m.m.m.c. al lui $p(s)$ şi $q(s)$ sînt asociaţi în divizibilitate, existînd un singur c.m.m.m.c. monic al lor.

Două polinoame $p(s)$ şi $q(s)$ se numesc *relativ prime* sau *coprime*, dacă 1 este un c.m.m.d.c. al lor.

Noţiunile de c.m.m.d.c. şi c.m.m.m.c. se extind imediat la mai mult de două polinoame.

Fie $p_1(s), p_2(s), \ldots, p_n(s) \in \mathbb{R}[s]$. Calculul c.m.m.d.c. al lor se face cu *algoritmul lui Euclid* care constă în

0. Se formează $n \times (n+1)$ matricea

$$A(s) = [P(s) \vdots I_n]$$

unde I_n este $n \times n$ matricea unitate iar $P(s)$ este o coloană ale cărei componente sînt $p_1(s), \ldots, p_n(s)$.

1. Se explorează coloana $P(s)$. Dacă aceasta este nulă algoritmul se opreşte. Dacă nu, fie $p_k(s)$ primul, de sus în jos, polinom nenul de grad minim faţă de gradele polinoamelor nenule din $P(s)$.

2. Se permută în $A(s)$ linia lui $p_k(s)$ cu linia 1^{-a}, $p_k(s)$, devenind $p_1(s)$. Se efectuează împărţirile $p_i(s) : p_1(s)$, $i = 2, \ldots, n$, rezultînd $p_i(s) = q_i(s)p_1(s) + r_i(s)$ cu $\partial[r_i(s)] < \partial[p_1(s)]$.

3. Se înmulţeşte prima linie din $A(s)$ cu $q_i(s)$ şi se scade din linia i a lui $A(s)$, pentru $i = 2, \ldots, n$, rezultînd pe poziţiile $2,3,\ldots,n$ ale lui $P(s)$, $r_i(s)$. Dacă un $r_i(s) \neq 0$ se revine la pasul 1. Dacă toţi $r_i(s)$ $i=2,\ldots,n$ sînt nuli algoritmul se opreşte.

Se constată că după fiecare parcurgere completă a paşilor algoritmului, gradul polinomului de pe prima poziţie a lui $P(s)$ scade cel puţin cu o unitate, astfel încît condiţia $p_1(s) \mid p_i(s)$, $i = 2, \ldots, n$, trebuie să se realizeze sigur, cazul limită fiind $p_1(s) = \text{ct.} \neq 0$. Astfel, algoritmul lui Euclid se opreşte sigur după un număr finit de paşi, matricea I_n devenind o matrice de polinoame notată $U(s)$, iar coloana $P(s)$ fiind nulă exceptînd prima poziţie care este ocupată de un polinom nenul notat $d(s)$. Se verifică imediat că $|U(s)| = \text{ct.} \neq 0$, astfel că $U^{-1}(s)$ este tot o matrice de polinoame. De asemenea, din modul de lucru al algoritmului se constată cu uşurinţă că

$$U(s)P(s) = \begin{bmatrix} d(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Fie $V(s) = U^{-1}(s) = [v_{ij}(s)]$. Explicitînd $P(s)$ din (1) rezultă $p_i(s) = v_{i1}(s)d(s)$, $i = 1,2, \ldots, n$, cu alte cuvinte, $d(s)$ este un divizor comun al polinoamelor $p_1(s), \ldots, p_n(s)$. Pe de altă parte, dacă $U(s) = [u_{ij}(s)]$, rezultă din (1),

$$d(s) = u_{11}(s)p_1(s) + u_{12}(s)p_2(s) + \ldots + u_{1n}(s)p_n(s). \tag{2}$$

Se vede acum din (2), că dacă $p_i(s)$ au un divizor comun, $d(s)$ este multiplu de acesta, rezultînd deci că $d(s)$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $p_i(s)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă polinoamele $p_1(s), \ldots, p_n(s)$ sînt relativ prime, atunci $d(s)$ este o constantă nenulă d, rezultînd din relaţia (2) că există polinoamele $\alpha_i(s)$ $(= u_{1i}(s)/d)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît

$$\alpha_1(s)p_i(s) + \ldots\ldots + \alpha_n(s)p_n(s) = 1. \tag{3}$$

Pentru calculul c.m.m.m.c. $m(s)$ al polinoamelor $p_1(s), \ldots, p_n(s)$, se aplică relaţia $m(s) = p_1(s) \cdot p_2(s) \ldots\ldots p_n(s)/d(s)$, unde $d(s)$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor $p_i(s)$ (cititorul verificînd ca exerciţiu validitatea relaţiei de mai sus).

Fie acum $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ monic. Atunci $p(s)$ se factorizează în

$$p(s) = \nu_1(s)^{k_1}\nu_2(s)^{k_2} \ldots \nu_q(s)^{k_q} \tag{4}$$

unde polinoamele $\nu_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ sînt de forma $s + \lambda_i$ sau $s^2 + \beta_i s + \alpha_i$ cu $\beta_i^2 - 4\alpha_i < 0$, după cum rădăcinile lui $p(s)$ sînt reale sau complex conjugate. Întrucît $s + \lambda_i$ nu se mai poate factoriza, iar $s^2 + \beta_i s + \alpha_i$ nu se mai poate factoriza în produs de polinoame cu coeficienţi reali, deci din $\mathbb{R}[s]$, se spune că (4) este descompunerea lui $p(s)$ în produse de *factori ireductibili* sau *primi**). Faptul că orice $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ se descompune într-un produs de polinoame prime face ca $\mathbb{R}[s]$ să fie un *inel factorial*. Evident, dacă se consideră $\mathbb{C}[s]$ inelul polinoamelor cu coeficienţi complecşi, atunci toţi $\nu_i(s)$ din (4) sînt de forma $s + \lambda_i$ cu $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

DEFINIŢIA 5. Un inel unitar nenul $\mathbb{K}$, în care orice element nenul este inversabil se numeşte corp. Dacă inelul este şi comutativ, atunci $\mathbb{K}$ este un corp comutativ.

Cu alte cuvinte, pentru orice $x \neq 0$ din $\mathbb{K}$, există x^{-1} astfel încît $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.

Exemplul 2. Mulţimea Q a numerelor raţionale, mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe, cu operaţiile de adunare şi înmulţire, sînt corpuri comutative.

Fie polinoamele $r(s)$ şi $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ cu $p(s) \neq 0$, pentru care asociem elementul $\dfrac{r(s)}{p(s)}$ numit şi *fracţie* (de polinoame) unde $r(s)$ este numărătorul, iar $p(s)$ numitorul, totdeauna $\neq 0$, şi unde, prin definiţie $\dfrac{r(s)}{p(s)} = \dfrac{r'(s)}{p'(s)}$ dacă $r(s)p'(s) = r'(s)p(s)$.

Toate fracţiile egale cu $\dfrac{r(s)}{p(s)}$ în sensul definiţiei de mai sus, formează clasa elementului $\dfrac{r(s)}{p(s)}$ $\left(\text{care, evident, este egală cu cea a lui } \dfrac{r'(s)}{p'(s)}\right)$. Clasei fracţiei $\dfrac{r(s)}{p(s)}$ îi ataşăm elementul $t(s)$ numit *funcţie raţională* de variabila (sau în nedeterminata) s, aceasta fiind egală cu oricare din fracţiile clasei lui $\dfrac{r(s)}{p(s)}$. Cu alte cuvinte, dacă $\dfrac{r'(s)}{p'(s)} = \dfrac{r(s)}{p(s)}$, $\dfrac{r'(s)}{p'(s)}$ defineşte

---

*) În general, într-un inel integru noţiunile de „prim" şi „ireductibil" nu sînt echivalente.

aceeași funcție rațională $t(s)$, adică $t(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{r'(s)}{p'(s)} = \text{etc.}$ Se obișnuiește să se mai spună că $t(s)$ este *reprezentabilă* prin fracția $\frac{r(s)}{p(s)}$, sau prin $\frac{r'(s)}{p'(s)}$ etc. Mulțimea funcțiilor raționale se notează cu $\mathbb{R}(s)$ și formează un corp comutativ față de adunarea și înmulțirea uzuală a fracțiilor (verificarea acestei afirmații fiind lăsată ca exercițiu cititorului). $\mathbb{R}(s)$ se mai numește și *corpul de fracții al lui* $\mathbb{R}[s]$. În mod analog se introduce $\mathbb{C}(s)$ ca fiind corpul de fracții al lui $\mathbb{C}[s]$.

Fie $t(s) = \frac{r(s)}{p(s)}$ o funcție rațională. Dacă $\partial[r(s)] \leqslant (<) \partial[p(s)]$, $t(s)$ se numește *proprie* (*strict proprie*). Dacă $r(s)$ și $p(s)$ sînt coprime atunci $\frac{r(s)}{p(s)}$ se numește *ireductibilă*. Este clar că *o funcție rațională se reprezintă unic printr-o fracție ireductibilă cu numitor monic*. Fie $t(s) = \frac{r(s)}{p(s)}$ cu $\partial[r(s)] \geqslant \partial[p(s)]$. Atunci avem unic $r(s) = m(s)p(s) + n(s)$ cu $\partial[n(s)] < \partial[p(s)]$, de unde $t(s) = m(s) + \frac{n(s)}{p(s)}$, $m(s)$ numindu-se *partea întreagă* sau *cîtul* lui $t(s)$, iar $\frac{n(s)}{p(s)}$ *partea strict proprie*.

Fie $\mathbb{K}$ un corp și fie 1 unitatea sa. Vom nota $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = n.1$. Dacă în corpul $\mathbb{K}$, $n \cdot 1 = 0$ numai pentru $n = 0$, corpul se numește de *caracteristică zero*, în caz contrar este de caracteristică $n(\neq 0)$, demonstrîndu-se că n este număr prim. $\mathbb{R}$, Q, $\mathbb{C}$ sînt corpuri de caracteristică zero.

Definiția 5. Fie A un inel unitar și X un grup abelian aditiv. Dacă pentru fiecare $a \in A$ și $x \in X$ definim $ax \in X$ numită operație algebrică externă cu proprietățile

(i) $a(x + y) = ax + ay$

(ii) $(a + b)x = ax + bx$

(iii) $a(bx) = (ab)x$

(iiii) $1x = x$

pentru orice $a, b \in A$ și $x, y \in X$, se spune că pe X s-a definit o structură de A-modul (stîng) sau că X este un A-modul.

Definiția 6. Dacă în definiția 5, în locul inelului A se consideră un corp $\mathbb{K}$, se spune că pe X s-a definit o structură de $\mathbb{K}$-spațiu liniar (stîng), elementele lui X numindu-se vectori, iar $\mathbb{K}$ se mai numește și corpul scalarilor.

Așadar, *un A-modul X unde $A = \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ fiind corp, este un $\mathbb{K}$-spațiu liniar.*

Fie X un A-modul și $X_1 \subset X$. X_1 se numește submodul al lui X dacă

(i) $x - y \in X_1$, $\forall\ x, y \in X_1$

(ii) $ax \in X_1$, $\forall\ a \in A$ și $x \in X_1$.

Scanned with OKEN Scanner

Submodulele unui $\mathbb{K}$-spaţiu liniar X se numesc *subspaţii liniare* ale lui X.

Fie X un A-modul şi $x_1, \ldots, x_n \in X$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ cu n oricare $\geqslant 1$. Elementul $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ din X se numeşte *combinaţie liniară* cu coeficienţi din A sau peste A, de elementele $x_1, \ldots, x_n$. Fie A-modulul X şi $X_1 \subset X$ o parte a sa. Notăm cu $\langle X_1 \rangle$ totalitatea combinaţiilor liniare peste A de elemente din X_1. Atunci (exerciţiu pentru cititor) $\langle X_1 \rangle$ este cel mai mic A-submodul al lui X care conţine pe X_1, numindu-se submodulul *generat* de X_1.

Vom spune că $G \subset X$ este un *sistem de generatori* al A-modulului X, sau că G generează pe X, dacă $\langle G \rangle = X$. Cu alte cuvinte, orice element $x \in X$ este combinaţie liniară peste A de elemente din G. Evident $\langle X \rangle = X$, adică *orice* A-modul *are un sistem de generatori*.

Dacă A-modulul X are cel puţin un sistem finit de generatori, atunci X se numeşte *finit generat* sau de *tip finit*.

Sistemul finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale A-modulului X se spune că este liniar independent sau *liber* peste A, dacă din $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, $a_i \in A$, rezultă $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O parte X_1 a A-modulului X se numeşte liniar independentă sau *liberă* peste A dacă orice sistem finit de elemente din X_1 este liniar independent.

Fie A-modulul X. O parte $B \subset X$ se numeşte *bază* a A-modulului X, dacă :

(i) este *liberă*

(ii) *generează* pe $X (\langle B \rangle = X)$.

Un A-modul X care admite cel puţin o bază se numeşte liber.

În particular pentru spaţiile liniare funcţionează următoarea teoremă, împreună cu corolarul ei, pe care o enunţăm fără demonstraţie.

TEOREMA 2. *Orice $\mathbb{K}$-spaţiu liniar $X \neq 0$ este liber.*

COROLARUL 1. Orice $\mathbb{K}$-spaţiu liniar $X \neq 0$, de tip finit admite cel puţin o bază finită. Mai mult, toate bazele unui asemenea spaţiu sînt finite şi au acelaşi număr de vectori.

Dacă X este un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar de tip finit, se notează cu $\dim_{\mathbb{K}} X$ numărul de vectori ai unui baze a lui X numit şi dimensiunea peste $\mathbb{K}$ a lui X. Un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar de tip finit se mai numeşte şi *finit dimensional*. Orice $x \in X$, $\dim_{\mathbb{K}} X = n$, se exprimă *unic* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, unde g_i, $i = 1, \ldots, n$ este o bază, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, numindu-se *coordonatele* lui x în baza g_i.

DEFINIŢIA 7. Fie X şi Y două A-module. $u : X \to Y$ se numeşte morfism (sau homomorfism) de A-module dacă

(i) $u(x + y) = u(x) + u(y)$

(ii) $u(ax) = au(x)$

pentru orice $x, y \in X$ şi $a \in A$.

Dacă morfismul u este surjectiv el se numeşte *epic* sau *epimorfism*, iar dacă este injectiv se numeşte *monic* sau *monomorfism*.
Un morfism epic şi monic se numeşte *izomorfism* şi se notează $u : X \rightleftarrows Y$, iar A-modulele X şi Y se numesc *izomorfe*, notîndu-se $X \simeq Y$.

Dacă morfismul este de la X tot în X, el se numeşte *endomorfism*. Un endomorfism epic şi monic se mai numeşte şi *automorfism*.

Scanned with OKEN Scanner

Se va nota cu

$$\operatorname{Im} u = \{u(x) \mid x \in X\}$$

$$\operatorname{Ker} u = \{x \mid u(x) = 0\}$$

imaginea şi respectiv *nucleul* morfismului u.

Dacă $u : X \to Y$ este un morfism de A-module, atunci $\operatorname{Im} u \subset Y$ şi $\operatorname{Ker} u \subset X$ sînt A-submodule ale lui Y, respectiv X (demonstraţia este lăsată ca exerciţiu cititorului).

Două K-spaţii finit dimensionale sînt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune (demonstraţia este lăsată ca exerciţiu cititorului).

Fie X un A-modul şi $Y \subset X$ un submodul al său. Două elemente $x, y \in X$ se numesc egale modulo Y şi se notează $x = y \pmod Y$, dacă $x - y \in Y$. Fie $x \in X$. Atunci $\hat{x} = \{y \mid y = x \pmod Y\}$ se numeşte clasa de echivalenţă modulo y a lui x.

Mulţimea claselor de echivalenţă modulo Y se organizează ca A-modul prin

$$\hat{x} + \hat{y} \triangleq \widehat{x + y}$$

şi

$$a\hat{x} \triangleq \widehat{ax}$$

care se arată (lăsăm aceasta pe seama cititorului) că sînt operaţii bine definite. A-modulul astfel obţinut se numeşte *modul factor* şi se notează X/Y. Aplicaţia $\varphi : X \to X/Y$ definită prin $\varphi(x) = \hat{x}$ este surjectivă şi se numeşte *morfismul canonic*.

Fie $u : X \to Y$ un morfism de A-module şi fie modulul factor $X/\operatorname{Ker} u$ Atunci $\eta : X/\operatorname{Ker} u \to Y$, definită prin $\eta(\hat{x}) = u(x)$ este bine definită şi este un morfism monic de A-module (exerciţiu pentru cititor), rezultînd de aici $\operatorname{Im} u \cong X/\operatorname{Ker} u$ sau că $u = \eta \circ \varphi$, unde $\varphi : X \to X/\operatorname{Ker} u$ este morfismul canonic. Acest rezultat reprezintă *teorema fundamentală de izomorfism sau teorema factorizării canonice a morfismelor*.

Fie acum X un A-modul şi $(X_i)_{i \in I}$ o familie de submodule. Se numeşte sumă de submodule, notată $\sum_{i \in I} X_i$, totalitatea elementelor $x = \sum_{i \in I} x_i$ cu $x_i \in X_i$. Se arată uşor că $\sum_{i \in I} X_i$ este un submodul al lui X.

Fie X un A-modul şi $(X_i)_{i \in I}$ o familie de submodule. Suma $\sum_{i \in I} X_i$ se numeşte directă şi se notează $\bigoplus_{i \in I} X_i$, dacă din $\sum_{i \in I} x_i = 0$ rezultă $x_i = 0$, $i \in I$. Rezultă imediat (demonstraţia este lăsată ca exerciţiu cititorului) că $\sum_{i \in I} X_i$ este sumă directă dacă şi numai dacă

a) orice $x \in \sum_{i \in I} X_i$ se scrie unic $x = \sum_{i \in I} x_i$, $x_i \in X_i$

sau

b) $X_i \cap \sum_{j \neq i} X_j = 0$ pentru orice $i \in I$.

Fie X un A-modul şi $Y \subset X$ un submodul. Y se numeşte *sumand direct* al lui X dacă există submodulul Z astfel încît $X = Y \oplus Z$. Este clar că X şi O sînt sumanzi direcţi. Un A-modul X fără sumanzi direcţi cu excepţia lui X şi O, se numeşte *indecompozabil*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie X un A-modul și $Y \subset X$ un sumand direct al său. Atunci $X/Y \cong Z$ unde Z este orice submodul pentru care $X = Y \oplus Z$ (demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului).

Fie acum $\mathbb{R}[s]$ inelul polinoamelor cu coeficienți reali și fie $\mathbb{R}^n[s]$ mulțimea n-tuplelor $P(s)$, notate ca matrice coloană,

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_1(s) \\ \vdots \\ p_n(s) \end{bmatrix} = \text{col}^{*)}(p_1(s), \ldots, p_n(s))$$

unde $p_i(s) \in \mathbb{R}[s]$, $i = 1, \ldots, n$, în care definim *adunarea* elementelor prin $P(s) + Q(s) = \text{col}\,(p_1(s), \ldots, p_n(s)) + \text{col}\,(q_1(s), \ldots, q_n(s)) = \text{col}(p_1(s) + q_1(s), \ldots, p_n(s) + q_n(s))$ și *înmulțirea* unui element $P(s)$ *cu un polinom* $r(s)$ prin $r(s)P(s) = \text{col}\,(r(s)p_1(s), \ldots, r(s)p_n(s))$.
Introducînd

$$E_i(s) \triangleq i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n[s]$$

se vede imediat că orice $P(s) = \text{col}\,(p_1(s), \ldots, p_n(s))$ se exprimă unic prin

$$P(s) = p_1(s)E_1(s) + \ldots + p_n(s)E_n(s).$$

Așadar, $\mathbb{R}^n[s]$ *este un* $\mathbb{R}[s]$*-modul liber de tip finit în* care $E_1(s), \ldots, E_n(s)$ reprezintă baza standard.

PROPOZIȚIA 2. Orice bază a lui $\mathbb{R}^n[s]$ are n elemente.

Demonstrație. Fie $P(s) = [P_1(s) \ldots P_p(s)]$ o $n \times p$ matrice ale cărei coloane formează o bază pentru $\mathbb{R}^n[s]$. Atunci elementele $E_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, ale bazei standard se pot exprima cu ajutorul coloanelor lui $P(s)$, adică există o $p \times n$ matrice polinomială $Q(s)$ astfel încît $P(s)Q(s) = I_n$. Atunci pentru un $s_0 \in \mathbb{R}$ avem $P(s_0)Q(s_0) = I_n$, adică rang $P(s_0) = n$ și deci $p \geqslant n$. Presupunem $p > n$. Cum $P_1(s), \ldots, P_n(s)$ sînt liniar independente $\bar{P}(s) \triangleq [P_1(s) \ldots . P_n(s)]$ este nesingulară. Fie $P_0(s) \in \mathbb{R}^n[s]$ de forma $P_0(s) = |\bar{P}(s)| P_{n+1}(s)$. Atunci $P_0(s) = \bar{P}(s)\bar{P}^+(s)^{**)} P_{n+1}(s)$, adică $P_0(s) = p_1(s)P_1(s) + \ldots + p_n(s)P_n(s)$, unde col $(p_1(s), \ldots, p_n(s)) \triangleq \bar{P}^+(s)P_{n+1}(s)$. În consecință, avem $p_1(s)P_1(s) + \ldots + p_n(s)P_n(s) - |\bar{P}(s)|\, P_{n+1}(s) = 0$, ceea ce este absurd.

Numărul n al elementelor oricărei baze ale lui $\mathbb{R}^n[s]$ *se numește rangul modulului* $\mathbb{R}^n[s]$, sau cum se mai spune $\mathbb{R}^n[s]$ este un modul de *rang finit* n.

PROPOZIȚIA 3. Fie $P_i(s) \in \mathbb{R}^n[s]$ $i = 1, 2, \ldots, n$, și $n \times n$ matricea $P(s) = [P_1(s), \ldots, P_n(s)]$. Atunci $P_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, formează o bază

*) Prescurtarea de la coloană.
**) Matricea adjunctă a lui $P(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

pentru $\mathbb{R}^n[s]$ dacă și numai dacă $|P(s)| = \text{ct} \neq 0$ sau cum se mai spune $P(s)$ este unimodulară.

Demonstrație. Presupunem că $P_i(s)$, $i = 1,2,\ldots,n$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^n[s]$. Atunci elementele $E_i(s)$ (definite mai sus) se exprimă unic prin

$$E_i(s) = q_{1i}(s)P_1(s) + \ldots + q_{ni}(s)P_n(s) =$$

$$= P(s)\begin{bmatrix} q_{1i}(s) \\ \vdots \\ q_{ni}(s) \end{bmatrix} \triangleq P(s)Q_i(s)$$

Atunci

$I_n = [E_i(s) \ \ldots \ E_n(s)] = P(s)[Q_1(s) \ \ldots \ Q_n(s)] \triangleq P(s)Q(s)$, adică $P^{-1}(s) = Q(s)$, ceea ce înseamnă că inversa matricii de polinoame $P(s)$ este tot o matrice de polinoame, aceasta revenind la $|P(s)| = \text{ct}$. Reciproc. Presupunem că $P(s)$ este unimodulară și fie $Q(s) \in \mathbb{R}^n[s]$. Atunci $Q(s) = P(s)P^{-1}(s)Q(s)$. Întrucît $P^{-1}(s)$ este polinomială $P^{-1}(s)Q(s)$ este o coloană $R(s) = \text{col}\,(r_1(s),\ldots,r_n(s))$ din $\mathbb{R}^n[s]$. Rezultă că $Q(s) = r_1(s)P_1(s) + \ldots + r_n(s)P_n(s)$, adică coloanele lui $P(s)$ generează $\mathbb{R}^n[s]$. Cum aceste coloane sînt liniar independente peste $R[s]$ (a se verifica de către cititor), rezultă că ele formează o bază pentru $\mathbb{R}^n[s]$ și propoziția este complet demonstrată.

Fie acum un morfism de la $\mathbb{R}^m[s]$ în $\mathbb{R}^p[s]$ unic precizat prin $\mathbb{R}^m[s] \ni E_i(s) \mapsto P_i(s) \in \mathbb{R}^p[s]$ unde prin $E_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, s-au notat elementele bazei standard din $\mathbb{R}^m[s]$. Este clar că acestui morfism i se atașează $p \times m$ matricea $P(s) = [P_1(s), \ldots, P_m(s)]$ în sensul $\mathbb{R}^m[s] \ni Q(s) \mapsto P(s)Q(s) \in \mathbb{R}^p(s)$. În construcțiile din lucrare morfismele se vor *identifica* cu matricile polinomiale în sensul construcției de mai sus. Următoarea precizare evidențiază distincția dintre noțiunea de modul și cea de spațiu liniar. Fie în acest sens $n \times n$ matricea polinomială $P(s)$ ca endomorfism al lui $\mathbb{R}^n[s]$. Presupunem $P(s)$ nesingulară și neunimodulară ($\partial[|P(s)|] \geqslant 1$). Se vede imediat că $P(s)$ nu este un morfism epic întrucît, cu toate că $P(s)$ este nesingulară ecuația $P(s)X(s) = Y(s)$ cu $Y(s) \in \mathbb{R}^n[s]$ nu are pentru orice $Y(s) \in \mathbb{R}^n[s]$ o soluție în $\mathbb{R}^n[s]$ (deoarece $P^{-1}(s)Y(s)$ nu este întotdeauna polinomială). Așa dar submodulul Im $P(s)$ este strict conținut în $\mathbb{R}^n[s]$. Pe de altă parte, coloanele lui $P(s)$, care este nesingulară, sînt liniar independente peste $\mathbb{R}[s]$ și deci Im $P(s)$ este un submodul liber al lui $\mathbb{R}^n[s]$, de rang n. Așadar, Im $P(s) \subsetneqq \mathbb{R}^n[s]$ cu rang Im $P(s) =$ $=$ rang $\mathbb{R}^n[s] = n$, fapt care nu se întîmplă în spațiile liniare finit dimensionale, unde un subspațiu strict conținut într-un spațiu liniar finit dimensional, este de dimensiune strict mai mică decît cea a spațiului. Cele de mai sus evidențiază, totodată, distincția între noțiunile „dimensiune" și „rang".

Propoziția 4. Automorfismele lui $\mathbb{R}^n[s]$ sînt matricile unimodulare. Demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului.

Fie $\mathbb{R}(s)$ corpul funcțiilor raționale. Vom nota cu $\mathbb{R}^n(s)$ mulțimea n-tuplelor $T(s)$, notate ca matrici coloană, $T(s) = \text{col}(t_1(s) \ \ldots, \ t_n(s))$ cu $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)$, $i = 1, 2, \ldots n$, în care definim *adunarea* prin $T(s) + W(s) =$ $= \text{col}(t_1(s),\ldots, t_n(s)) + \text{col}\,(w_1(s), \ldots, w_n(s)) = \text{col}(t_1(s) + w_1(s),\ldots,t_n(s) +$ $+ w_n(s))$ și *înmulțirea* unui $T(s) \in \mathbb{R}^n(s)$ cu $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ prin $t(s)T(s) =$ $= \text{col}\,(t(s)t_1(s),\ldots, t(s)t_n(s))$. Atunci rezultă că $\mathbb{R}^n(s)$ este un $\mathbb{R}(s)$-spațiu liniar n dimensional, $\dim_{\mathbb{R}(s)} \mathbb{R}^n(s) = n$.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog ca mai sus, *morfismele de la* $\mathbb{R}^m(s)$ *în* $\mathbb{R}^p(s)$ *vor fi reprezentate prin* $p \times m$ *matrici raționale.*

Fie $\mathbb{R}^n$ mulțimea n-tuplelor $x = \text{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$ cu $x_i \in \mathbb{R}$ în care definim *adunarea* prin $x + y = \text{col}\,(x_1, \ldots, x_n) + \text{col}\,(y_1, \ldots, y_n) = \text{col}\,(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ și *înmulțirea* unui $x \in \mathbb{R}^n$ *cu* $\lambda \in \mathbb{R}$ prin $\lambda x = \text{col}\,(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Rezultă imediat că orice $x \in \mathbb{R}^n$ se scrie unic în forma $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, unde $e_i = \text{col}\,(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ formează baza standard, iar componentele x_i, ale n-tuplului x, se numesc *coordonatele* lui x (în baza standard). Așadar, $\mathbb{R}^n$ este un $\mathbb{R}$-spațiu liniar n dimensional numit spațiul real euclidian n-dimensional.

Subspațiile lui $\mathbb{R}^n$ se vor nota cu litere ronde mari. Fie T o $n \times n$ matrice nesingulară. Vom numi

$$\hat{x} = Tx \tag{5}$$

transformare de coordonate. Semnificația lui (5) este următoarea: Fie $x = \text{col}\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ și $\hat{x} = \text{col}\,(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ calculat cu (5). Dacă acum $T^{-1} = [g_1, \ldots, g_n]$, rezultă din (5) că $x = \hat{x}_1 g_1 + \ldots + \hat{x}_n g_n$ adică $\hat{x}_i$ sînt coordonatele vectorului x (n-tuplului x) în baza g_i, $i = 1, \ldots, n$. Așadar, dacă se dă o bază a lui $\mathbb{R}^n$ reprezentată prin coloanele matricii $S = [g_1 \ldots g_n]$, raportarea lui $x \in \mathbb{R}^n$ la această bază se face cu (5), unde $T = S^{-1}$.

Fie acum $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ un subspațiu și coloanele $n \times q$ matricii V formînd o bază a sa. Evident, $\dim \mathcal{V} = q$. Fie V completată arbitrar pînă la o matrice nesingulară $S = [V \mid W]$. Coloanele lui W formează acum o bază pentru subspațiul $\mathcal{W}$ cu $\dim \mathcal{W} = n - q$, unde se vede imediat că $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Clar că orice $x \in \mathbb{R}^n$ se scrie unic $x = v + w$ cu $v \in \mathcal{V}$ și $w \in \mathcal{W}$. Aplicația $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definită prin $x = v + w \mapsto v$ se numește *proiecția pe* $\mathcal{V}$ *paralel cu* $\mathcal{W}$. P se calculează imediat din relațiile evidente $PV = V$ și $PW = 0$ adică $PS = [V \quad 0]$ de unde

$$P = [V \quad 0]S^{-1}. \tag{6}$$

Se verifică imediat că $\mathbb{R}^n = \text{Im}\,P \oplus \text{Ker}\,P$, $\text{Im}\,P = \mathcal{V}$, $\text{Ker}\,P = \mathcal{W}$, iar $P^2 = P$ (idempotență). De asemenea, $I - P$ este proiecția pe $\mathcal{W}$ paralel cu $\mathcal{V}$, unde I este matricea unitate. Fie acum $x \in \mathbb{R}^n$. Atunci, conform celor de mai sus, relația (5) scrisă cu $T = S^{-1}$, adică

$$\hat{x} = S^{-1}x = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} q \\ \} n - q \end{matrix}$$

furnizează coordonatele lui x în baza formată din coloanele lui S, unde $q \times 1$ coloana $\hat{x}_1$ furnizează coloanele lui $Px \in \mathcal{V}$ în baza V, iar $(n - q) \times 1$ coloana $\hat{x}_2$ furnizează coordonatele lui $(I - P)x$ în baza W. Așadar, $\hat{x}_1 = [I_q \quad 0]\hat{x} = [I_q \quad 0]S^{-1}x$. Se vede că s-a definit o aplicație $x \mapsto \hat{x}_1$ de la $\mathbb{R}^n$ în $\mathcal{V}$, exprimată prin $q \times n$ matricea

$$\tilde{P} = [I_q \quad 0]S^{-1} \tag{7}$$

Scanned with OKEN Scanner

care poartă numele de *proiecția canonică* pe $\mathscr{V}$. Dacă se scrie $S^{-1} \triangleq \left[\begin{array}{c} \hat{V} \\ \hline \hat{W} \end{array}\right]$ atunci din (7) rezultă că $\tilde{P} = \hat{V}$. Întrucît, din cele referitoare mai sus la sumanzii direcți, $\mathbb{R}^n/\mathscr{W} \cong \mathscr{V}$, *$P$ se identifică cu morfismul canonic al lui $\mathbb{R}^n$ pe spațiul factor $\mathbb{R}^n/\mathscr{W}$*. Întrucît orice $x \in \mathbb{R}^n$ situat în $\mathscr{V}$ se scrie $x = V\hat{x}_1$, se vede că avem și aplicația $\hat{x}_1 \mapsto x$, de la $\mathscr{V}$ în $\mathbb{R}^n$, exprimată prin $n \times q$ matricea V care se numește *injecția canonică a lui $\mathscr{V}$ în $\mathbb{R}^n$*.

Fie acum un endomorfism al lui $\mathbb{R}^n$ exprimat prin $n \times n$ matricea A și fie transformarea (5). Atunci $y = Ax$ se scrie $\hat{y} = Ty = TAx = TAT^{-1}\hat{x} = \hat{A}\hat{x}$, adică

$$\hat{A} = TAT^{-1} \tag{8}$$

(8) reprezentînd „modificarea" matricii A la transformarea (5) sau reprezentînd matricea endomorfismului considerat mai sus, în baza formată din coloanele lui T^{-1}.

Un spațiu $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^n$ se numește A-invariant dacă

$$A\mathscr{V} \subset \mathscr{V}. \tag{9}$$

Dacă $n \times q$ matricea V formează o bază pentru $\mathscr{V}$, dim $\mathscr{V} = q$, atunci relația (9) se scrie

$$AV = VK \tag{10}$$

unde K este o $q \times q$ matrice adecvată. K se numește *restricția* lui A la $\mathscr{V}$ și se notează $A|\mathscr{V}$. Se vede imediat că (10) se traduce în comutativitatea diagramei:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle V}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle V} \\ \mathscr{V} & \xrightarrow{K} & \mathscr{V} \end{array}$$

unde se vede că V este injecția canonică a lui $\mathscr{V}$ în $\mathbb{R}^n$. Pentru determinarea lui K, fie o completare arbitrară a lui V pînă la o matrice nesingulară $S = [V \vdots W]$ ceea ce revine la $\mathbb{R}^n = \mathscr{V} \oplus \mathscr{W}$, unde $n \times (n-q)$ matricea W este o bază a lui $\mathscr{W}$. Fie transformarea $\hat{x} = S^{-1}x$. Atunci din (8) avem $\hat{A} = S^{-1}\,AS = S^{-1}\,A[V \vdots W] = S^{-1}\,[AV \vdots AW] = S^{-1}\,[VK \vdots AW]$ ultima egalitate rezultînd din (10). Cum $S^{-1}[V \vdots W] = I$ avem $S^{-1}V = I\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$ Atunci, în definitiv

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c:c} K & \\ & S^{-1}AW \\ 0 & \end{array}\right] \triangleq \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $A_1 = K$. Aşadar, dacă $\mathscr{V}$ este A-invariant există o transformare care aduce A la forma (11) unde $\hat{A}_1 = A|\mathscr{V}$.

Explicitînd relaţia evidentă $S^{-1}A = \hat{A}S^{-1}$ avem

$$\begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{W} \end{bmatrix}$$

de unde din ultima bloc linie rezultă

$$\hat{W}A = \hat{A}_3\hat{W} \tag{12}$$

Dar conform celor de mai sus $\hat{W}$ este proiecţia canonică pe $\mathbb{R}^n/\mathscr{V}$ pe care o notăm cu $\tilde{P}$. Atunci (12) arată că diagrama de mai jos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{P}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{P}} \\ \mathbb{R}^n/\mathscr{V} & \xrightarrow[\hat{A}_3]{} & \mathbb{R}^n/\mathscr{V} \end{array}$$

comută. $\hat{A}_3$ se numeşte *aplicaţia indusă* de A în spaţiul factor $\mathbb{R}^n/\mathscr{V}$, ea fiind bine definită de $\hat{A}_3\tilde{P} = \tilde{P}A$.

Spunem că subspaţiul A-invariant $\mathscr{V}$ descompune $\mathbb{R}^n$ relativ la A dacă există un subspaţiu A-invariant $\mathscr{W}$ astfel încît $\mathbb{R}^n = \mathscr{V} \oplus \mathscr{W}$.

Repetînd raţionamentul de mai sus rezultă că dacă $\mathscr{V}$ descompune $\mathbb{R}^n$ relativ la A, există o transformare T astfel încît $\bar{A} = TAT^{-1}$ este de forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}$$

adică spre deosebire de (11) $\bar{A}_2 = 0$. Pentru a vedea dacă un subspaţiu A-invariant $\mathscr{V}$ descompune $\mathbb{R}^n$ relativ la A, procedăm astfel. Se alege o matrice V ale cărei coloane formează o bază pentru $\mathscr{V}$. Se completează V pînă la o matrice nesingulară $S = [V \quad W]$. Folosind transformarea $\hat{x} = S^{-1}x$ rezultă $\hat{A} = S^{-1}AS$ de forma (11) iar $\hat{V} = TV = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$, $q = \dim \mathscr{V}$. Completăm acum $\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$ pînă la matricea nesingulară $R = \begin{bmatrix} I_q & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ unde evident Q_2 este $(n-q) \times (n-q)$ nesingulară. Aplicăm acum transformarea $\bar{x} = R^{-1}\hat{x}$, rezultînd $\bar{A} = R^{-1}\hat{A}R \triangleq \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}$, adică explicit

$$\begin{bmatrix} I_q & -Q_1Q_2^{-1} \\ 0 & Q_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & Q_1 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ 0 & \bar{A}_3 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculînd, rezultă $\bar{A}_2 = \hat{A}_1 Q_1 + \hat{A}_2 Q_2 - Q_1 Q_2^{-1} \hat{A}_3 Q_2$, unde trebuie ca $\bar{A}_2 = 0$, ceea ce conduce la ecuația

$$\hat{A}_1 Q - Q \hat{A}_3 = -\hat{A}_2 \tag{13}$$

($Q \triangleq Q_1 Q_2^{-1}$). Dacă ecuația (13), numită și ecuația lui Silvester, are o soluție, atunci punînd $Q_2 = I_{n-q}$, rezultă $\bar{A}_2 = 0$.

Un spațiu A-invariant $\mathcal{V}$ cu o dimensiune se numește *direcție proprie* iar orice vector bază $v \neq 0$ al său se numește *vector propriu*.
În aceste condiții (10) devine

$$Av = \lambda v \tag{14}$$

cu $\lambda \in \mathbb{R}$, unde $\lambda = A \mid \mathcal{V}$ se numește *valoare proprie*. Scriind (14) în forma $(\lambda I - A)v = 0$ cu $v \neq 0$, rezultă $\lambda I - A$ singulară adică $|\lambda I - A| = 0$. Polinomul monic $\chi(\lambda) = |\lambda I - A|$ se numește *polinomul caracteristic* al matricii A, rădăcinile lui fiind valorile proprii.

Încheiem cu cîteva considerații privind noțiunile de *bună formulare* și *genericitate*.

Fie Π o proprietate asociată unui număr finit de matrici A, B etc. Dacă elementele acestor matrici notate $p_1, \ldots, p_N$ se modifică, se pune întrebarea în ce măsură proprietatea Π este adevărată sau este infirmată. Asociem setului de parametri punctul $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ iar Π va fi privită ca o aplicație $\mathbb{R}^N \to \{0, 1\}$ în sensul că $\Pi(p) = 1$ înseamnă că proprietatea este adevărată în punctul p iar $\Pi(p) = 0$ înseamnă că proprietatea este falsă în acel punct.

Fie $e_1(p), \ldots, e_k(p)$, $p \in \mathbb{R}^N$, un număr finit de polinoame (de variabilele $p_1, \ldots, p_N$). Zerourile comune acestor polinoame definesc o *varietate algebrică* V în $\mathbb{R}^N$, adică

$$V = \{p \mid e_i(p) = 0,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Dacă $V \subsetneq \mathbb{R}^N$, V este o varietate proprie. Vom spune că proprietatea Π este *generică* dacă există o varietate algebrică proprie V, astfel încît $\Pi(p) = 0$, numai dacă $p \in V$. Fie V^c complementarul lui V față de $\mathbb{R}^N$. Atunci pentru orice $p \in V^c$, $\Pi(p) = 1$. Mai mult, dacă $p_0 \in V^c$ deci $\Pi(p_0) = 1$, există totdeauna o ε-vecinătate a lui p_0 în care Π continuă să fie adevărată. În acest sens se spune că proprietatea Π este *bine formulată* în p_0.

De remarcat că, dacă $p \in V$, deci $\Pi(p) = 0$, este suficientă o „mică" modificare a lui p în $\hat{p}$, astfel încît $\hat{p}$ părăsind varietatea, $\Pi(\hat{p}) = 1$, adică proprietatea să fie adevărată, cu alte cuvinte, dacă Π este generică și ea este infirmată pentru un set de parametri, este suficientă o modificare „mică" arbitrară a acestor parametri (în sensul părăsirii lui V) ca proprietatea să devină adevărată. Cu o exprimare liberă, nefundamentată riguros aici, vom spune că dacă o proprietate este generică, atunci ea este adevărată aproape pentru toți parametrii sau că „șansa" de a fi infirmată este „nulă".

Scanned with OKEN Scanner

A.2. TEORIA MATRICILOR POLINOMIALE ȘI A MATRICILOR RAȚIONALE

DEFINIȚIA 1. O $p \times m$ matrice $P(s)$ cu elemente din inelul $\mathbb{R}[s]$ se numește matrice polinomială*) (peste $\mathbb{R}[s]$).

Fie $P(s)$ o $m \times m$ matrice (pătrată). Determinantul matricii $P(s)$ se va nota cu $|P(s)|$, fiind un element din $\mathbb{R}[s]$ (adică un polinom). Dacă $|P(s)| \neq 0$, matricea se numește *nesingulară*.

DEFINIȚIA 2. O $m \times m$ matrice $U(s)$ se numește unimodulară dacă $|U(s)| = \text{ct} \neq 0$, adică $U(s)$ este un element inversabil în $\mathbb{R}[s]$.

PROPOZIȚIA 1. O $m \times m$ matrice $P(s)$ este inversabilă (în sensul că inversa este tot o matrice polinomială) dacă, și numai dacă, este unimodulară.

Demonstrație. Presupunem $P(s)$ unimodulară. Atunci din egalitatea cunoscută.

$$P(s)P^{+}(s)^{**)} = P^{+}(s)P(s) = |P(s)|I_m = \text{ct}.\, I_m$$

rezultă

$$P^{-1}(s) = \text{ct}^{-1}P^{+}(s).$$

Reciproc. Dacă există $Q(s)$ astfel încît $P(s)Q(s) = I_m$, atunci avem și $|P(s)||Q(s)| = 1$, de unde rezultă că $|P(s)| = \text{ct} \neq 0$.

DEFINIȚIA 3. Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice. Următoarele operații :

1. Înmulțirea unei linii (coloane) cu o constantă.
2. Adunarea la linia (coloana) i a liniei (coloanei) j, $j \neq i$, înmulțită cu un polinom.
3. Permutarea a două (linii) coloane,

se numesc *operații elementaresau unimodulare.*

PROPOZIȚIA 2. Orice matrice unimodulară se obține prin operații elementare asupra matricii unitate. Orice operație elementară asupra liniilor (coloanelor) unei matrici revine la înmulțirea acesteia la stînga (dreapta) cu o matrice unimodulară adecvată.

Demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului.

DEFINIȚIA 4. Două $p \times m$ matrici $P(s)$ și $Q(s)$ se zic

a) unimodular echivalente la stînga (dreapta) sau unimodular echivalente pe linii (coloane) dacă există o matrice unimodulară $U(s)(V(s))$, astfel încît

$$P(s) = U(s)Q(s)\ (P(s) = Q(s)V(s)),$$

b) unimodular echivalente, dacă există matricile unimodulare $U(s)$ și $V(s)$, astfel încît

$$P(s) = U(s)Q(s)V(s).$$

Cu alte cuvinte, două matrici sînt unimodular echivalente, dacă una se obține din cealaltă prin operații elementare.

---

*) În textul care urmează nu se va mai specifica, decît dacă este în mod expres cazul, atributul de „polinomială".

**) $P^{+}(s)$ este matricea adjunctă a lui $P(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 5. O $p \times m$ matrice $E(s)$ se numește în forma de eșalon redus pe linii (sau Hermite normală pe linii) dacă, $e_{ij}(s)$ fiind primul element (de la stînga la dreapta) nenul din linia i, atunci pentru $k = i + 1, \ldots, p$, $e_{kj}(s) = 0$, iar pentru $k = 1, \ldots, i-1$ $\partial[e_{kj}(s)] < \partial[e_{ij}(s)]$ dacă $\partial[e_{ij}(s)] \geqslant 1$ și $e_{kj}(s) = 0$ dacă $e_{ij}(s) = \text{ct}$. Adesea, se consideră $e_{ij}(s)$ monic. O $p \times m$ matrice $E(s)$ se numește în forma de eșalon redus pe coloane (sau Hermite normală pe coloane) dacă $E^T(s)$ este în forma de eșalon redus pe linii.

Avem:

TEOREMA 1. *Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ este unimodular echivalentă la stînga cu o matrice eșalon redus pe linii $E(s)$.*

Demonstrația se face constructiv, aplicînd „Algoritmul de eșalon redus" (AER).

0°. Se formează matricea

$$A(s) = [P(s) \vdots I_p]$$

(asupra căreia se efectuează operații elementare pe linii).

Presupunem că submatricea de coloane a lui $P(s)$ între coloanele 1 și $j-1$, inclusiv, $(j-1 < m)$, a fost adusă la forma de eșalon redus, în această submatrice toate liniile de sub linia $(i-1)^{-a}(i-1 < p)$ care nu este identic nulă, fiind nule.

1°. Se explorează coloana j de la (i, j) la (p, j). Dacă această subcoloană este identic nulă se face $j = j+1$ și se reia pasul 1°. Dacă nu, fie $p_{kj}(s)$, $i \leqslant k \leqslant p$, primul (de sus în jos) polinom nenul de grad minim din subcoloana explorată*).

2°. Se permută în $A(s)$ linia i cu linia k, $p_{kj}(s)$ devenind $p_{ij}(s)$.

3°. Întrucît $p_{ij}(s)$ este de grad minim se efectuează împărțirile $p_{kj}(s) : p_{ij}(s)$, $k = i+1, \ldots, p$, rezultînd

$$p_{kj}(s) = q_{kj}(s)p_{ij}(s) + r_{kj}(s) \qquad (o)$$

$$\partial[r_{kj}(s)] < \partial[p_{ij}(s)], \quad k = i+1, \ldots, p.$$

4°. Se înmulțește linia i^{-a} din $A(s)$ cu $q_{kj}(s)$ și se scade (substrage) din linia k, $k = i+1, \ldots, p$, rezultînd pe pozițiile de la $(i+1, j)$ la (p, j) ale lui $P(s)$, $r_{kj}(s)$. Dacă un $r_{kj}(s) \neq 0$ se reia algoritmul de la pasul 1°. Dacă toți $r_{kj}(s) = 0$, $k = i+1, \ldots, p$, se efectuează o singură dată operațiile (o), pentru $k = 1,2, \ldots, i-1$, după care se substrage linia i^{-a} a lui $A(s)$ înmulțită cu $q_{kj}(s)$ din linia k a lui $A(s)$, $k = 1,2, \ldots, i-1$. Se face $i = i+1$ și se reia algoritmul de la pasul 1°.

Condițiile de oprire ale algoritmului sînt date de $i = p$ sau $j = m$, rezultînd în locul matricii I_p matricea unimodulară $U(s)$, iar în locul lui $P(s)$, matricea $E(s)$, astfel încît $E(s) = U(s)P(s)$.

Observația 1. Repetarea în coloana j, pentru $k = i+1, \ldots, p$, a operației (o) conduce la scăderea strictă a gradului lui $r_{kj}(s)$, rezultînd că algoritmul are un număr finit de pași. Dacă $e_{ij}(s)$ (din definiția 5) se dorește monic, se împarte linia i^{-a} a lui $A(s)$ cu coeficientul gradului acestuia. De asemenea, dacă $\partial[e_{ij}(s)] \geqslant 1$, atunci $e_{ij}(s)$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor care se găsesc, la pasul 1°, pe pozițiile (k, j) $k = i, i+1, \ldots, p$. Dacă $e_{ij}(s) = \text{ct} \ (\neq 0)$, aceste polinoame sînt relativ prime între ele.

*) În sensul că pot fi mai multe polinoame care au același grad minim în subcoloana explorată.

Scanned with OKEN Scanner

COROLARUL 1. Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ este unimodular echivalentă la dreapta cu o matrice eșalon redus pe coloane. Aceasta rezultă aplicînd algoritmul AER asupra lui $[P^T(s) \vdots I_m]$ și retranspunînd rezultatul.

DEFINIȚIA 6. O $p \times m$ matrice $P(s)$ se numește în forma superior triunghiulară la dreapta dacă $p_{i+k,i}(s) = 0$, $k = 1, \ldots, p-i$, $i = 1, \ldots, \ldots, p-1$; pentru $k = 1, \ldots, i-1$, $\partial[p_{ki}(s)] < \partial[p_{ii}(s)]$ dacă $\partial[p_{ii}(s)] \geqslant 1$ și $p_{ki}(s) = 0$ dacă $p_{ii}(s) = ct \neq 0$. Adesea se consideră $p_{ii}(s) \neq 0$, monic. O $p \times m$ matrice $P(s)$ se numește în forma inferior triunghiulară la stînga dacă $P^T(s)$ este superior triunghiulară la dreapta.

TEOREMA 2. *Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ este unimodular echivalentă la stînga cu o matrice superior triunghiulară la dreapta $Q(s)$.*

Demonstrația se face constructiv aplicînd „Algoritmul de triangularizare" (ATR).

0°. Identic cu 0° de la AER.

Presupunem că sub matricea de coloane a lui $P(s)$ între coloanele 1 și $i-1$, inclusiv ($i-1 < p, m$) a fost adusă la forma superior triunghiulară la dreapta.

1°. Se explorează coloana i de la (i, i) la (p, i). Dacă această subcoloană este nulă se face $i = i+1$ și se reia pasul 1°. Dacă nu, fie $p_{ki}(s)$, $i \leqslant k \leqslant p$, primul (de sus în jos) polinom nenul de grad minim din subcoloana explorată.

2°. Se permută linia k din $A(s)$ cu linia i, $p_{ki}(s)$ devenind $p_{ii}(s)$.

3°. Se efectuează operațiile de împărțire

$$p_{ki}(s) = q_{ki}(s)p_{ii}(s) + r_{ki}(s) \qquad (o')$$

$$\partial[r_{ki}(s)] < \partial[p_{ii}(s)], \quad k = i+1, \ldots, p.$$

4°. Se substrage linia i^{-a} din $A(s)$ înmulțită cu $q_{ki}(s)$ din linia k, $k = i+1, \ldots, p$, rezultînd pe pozițiile de la $(i+1, i)$ la (p, i) ale lui $P(s)$, $r_{ki}(s)$. Dacă un $r_{ki}(s) \neq 0$ se reia algoritmul de la pasul 1°. Dacă toți $r_{ki}(s) = 0$ se efectuează o singură dată operațiile (o') pentru $k = 1, 2, \ldots \ldots, i-1$. după care se substrage linia i^{-a} din $A(s)$ înmulțită cu $q_{ki}(s)$, din linia k, pentru $k = 1, 2, \ldots, i-1$. Se face $i = i+1$ și se reia algoritmul de la pasul 1°.

Condiția de oprire a algoritmului este dată de $i = p$, rezultînd în locul matricii I_p matricea unimodulară $U(s)$, iar în locul lui $P(s)$ matricea superior triunghiulară la dreapta $Q(s)$, astfel încît $Q(s) = U(s)P(s)$.

Observația 2. Dacă $p_{ii}(s) \neq 0$ se dorește monic, se împarte linia i^{-a} din $A(s)$ cu coeficientul gradului acestuia.

COROLARUL 2. Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ este unimodular echivalentă la dreapta cu o matrice inferior triunghiulară la stînga. Aceasta rezultă analog ca în corolarul 1.

Scanned with OKEN Scanner

DEFINIȚIA 7. O $p \times m$ matrice $\Lambda(s)$ se numește în forma diagonal canonică (sau forma Smith) dacă

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \delta_1(s) & & & & 0 \\ & \delta_2(s) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \delta_r(s) & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

unde $\delta_i(s) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r \leqslant p, m$, sînt polinoame monice iar $\delta_1(s) | \delta_2(s) | \ldots | \delta_r(s)$.

TEOREMA 3. *Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ este unimodular echivalentă cu o matrice diagonal canonică $\Lambda(s)$.*

Demonstrația se face constructiv prin „Algoritmul de diagonalizare canonică" (*ADC*).

0°. Se construiește masivul

$$D(s) = \begin{bmatrix} P(s) & I_p \\ I_m & \end{bmatrix}$$

Presupunem că $P(s)$ a fost diagonalizată canonic pînă la $\delta_{i-1}(s)$, inclusiv, $(i-1 < r)$.

1°. Se explorează submatricea $P_i(s)$, a lui $P(s)$, determinată prin vîrfurile (i, i), (i, m), (p, i) și (p, m). Dacă această submatrice este nulă algoritmul se oprește. Dacă nu, fie $p_{kl}(s)$ primul (în ordinea explorării de la stînga la dreapta pe linii, parcurse succesiv de sus în jos) polinom nenul de grad minim din $P(s)$.

2°. Se permută în $D(s)$ linia k cu linia i și coloana l cu coloana i, astfel încît $p_{kl}(s)$ devine $p_{ii}(s)$.

3°. Se efectuează împărțirile (pe coloană)

$$p_{ji}(s) = q_{ji}(s) p_{ii}(s) + r_{ji}(s)$$

$$\partial[r_{ji}(s)] < \partial[p_{ii}(s)], \quad j = i+1, \ldots, p.$$

4°. Se substrage linia i din $D(s)$, înmulțită cu $q_{ji}(s)$, din linia j, $j = i+1, \ldots, p$, rezultînd în coloana i $r_{ji}(s)$, $i+1 \leqslant j \leqslant p$. Dacă $r_{ji}(s) = 0$, $j = i+1, \ldots, p$ se trece la pasul 5°. Dacă nu, fie $r_{qi}(s)$, $i+1 \leqslant q \leqslant p$, primul (de sus în jos) polinom nenul de grad minim. Se permută în $D(s)$ linia i cu linia q, $r_{qi}(s)$ devenind noul $p_{ii}(s)$, după care se reia pasul 3°.

5°. Se explorează linia i între (i, i) și (i, m). Dacă această sublinie este nulă, se trece la pasul 8°. Dacă nu, fie $p_{it}(s)$, $i \leqslant t \leqslant m$, primul (de la stînga la dreapta) polinom nenul de grad minim. Se permută în $D(s)$ coloana t cu coloana i, $p_{it}(s)$ devenind $p_{ii}(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

6°. Se efectuează împărțirile (pe linie)

$$p_{ij}(s) = q_{ij}(s)p_{ii}(s) + r_{ij}(s)$$

$$\partial[r_{ij}(s)] < \partial[p_{ii}(s)],\ j = i+1, \ldots, m.$$

7°. Se substrage coloana i din $D(s)$, înmulțită cu $q_{ij}(s)$, din coloana j, $j = i+1, \ldots, m$, rezultînd în linia i $r_{ij}(s)$, $i+1 \leqslant j \leqslant m$. Dacă $r_{ij}(s) = 0$, $j = i+1, \ldots, m$, se trece la pasul 8°. Dacă nu, fie $r_{in}(s)$, $i+1 \leqslant n \leqslant m$, primul (de la stînga la dreapta) polinom nenul de grad minim. Se permută în $D(s)$ coloana i cu coloana n, $r_{in}(s)$ devenind $p_{ii}(s)$, și se reia pasul 6°.

8°. Se verifică dacă $p_{ii}(s) \mid p_{ki}(s)$, $k = i+1, \ldots, p$ și $l = i+1, \ldots, m$ (evident, dacă în particular toți $p_{ki}(s) = 0$, condiția este îndeplinită). Dacă da*), atunci se împarte linia i din $D(s)$ cu coeficientul gradului lui $p_{ii}(s)$, se face $i = i+1$ și se reia pasul 1°. Dacă nu, fie $p_{ri}(s)$, $i+1 \leqslant r \leqslant p$, $i+1 \leqslant t \leqslant m$, primul (în ordinea explorării de la stînga la dreapta pe linii, parcurse succesiv de sus în jos) polinom nenul pentru care $p_{ii}(s)$ nu divide $p_{ri}(s)$. Se adună în $D(s)$ linia t la linia i și se reia algoritmul de la pasul 1°.

Condițiile de oprire sînt fie cea de la pasul 1°, fie $i = \min(p, m)$, rezultînd în final în locul lui $P(s)$, matricea diagonal canonică $\Lambda(s)$, iar în locul matricilor I_p și I_m, matricile unimodulare $U(s)$ și respectiv $V(s)$ astfel încît

$$\Lambda(s) = U(s)P(s)V(s).$$

Observația 1. Întrucît $\delta_i(s)$ divide toate elementele lui $P_{i+1}(s)$, atunci, după aplicarea algoritmului de mai sus acestei submatrici, va rezulta o submatrice echivalentă cu $P_{i+1}(s)$ și, deci, în continuare $\delta_i(s)$ va divide toate elementele acestei ultime submatrici, în particular pe $p_{i+1,i+1}(s)$ $(= \delta_{i+1}(s))$.

Observația 2. Fie $P(s)$ o matrice. Notăm cu $\Delta_{kP}(s)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul k ai matricii $P(s)$. Fie acum $P(s)$ și $Q(s)$ două $p \times m$ și $m \times q$ matrici și $R(s) = P(s)Q(s)$. Atunci orice minor de ordinul k a lui $R(s)$ se exprimă ca combinație liniară de minori de ordinul k ai lui $P(s)$ cu coeficienți din $\mathbb{R}[s]$ sau ca o combinație liniară de minori de ordinul k ai lui $Q(s)$ cu coeficienți din $\mathbb{R}[s]$. Rezultă imediat de aici că $\Delta_{kP}(s) \mid \Delta_{kR}(s)$ și $\Delta_{kQ}(s) \mid \Delta_{kR}(s)$. Fie acum $R(s)$ și $P(s)$ unimodulare echivalente, adică $R(s) = U(s)P(s)V(s)$ cu $U(s)$ și $V(s)$ unimodulare. Atunci pe baza celor de mai sus, punînd $Q(s) = U(s)P(s)$, rezultă $\Delta_{kP}(s) \mid \Delta_{kQ}(s) \mid \Delta_{kR}(s)$ adică $\Delta_{kP}(s) \mid \Delta_{kR}(s)$. Din $P(s) = U^{-1}(s)R(s)V^{-1}(s)$ rezultă în mod analog că $\Delta_{kR}(s) \mid \Delta_{kP}(s)$, cu alte cuvinte $\Delta_{kP}(s)$ și $\Delta_{kR}(s)$ sînt asociați în divizibilitate.

Observația 3. Fie $\Lambda(s) = U(s)P(s)V(s)$, forma diagonal canonică a $p \times m$ matricii $P(s)$ avînd pe diagonala principală polinoamele monice $\delta_1(s), \delta_2(s), \ldots, \delta_r(s)$, $r \leqslant \min(p, m)$ și $\delta_1(s) \mid \delta_2(s) \mid \ldots \mid \delta_r(s)$. Atunci, pe baza observației 2, $\Delta_{kP}(s)$ și cu produsul $\delta_1(s)\delta_2(s)\ldots\delta_k(s)$, $k \leqslant r$ sînt asociați în divizibilitate. Rezultă imediat de aici că

1. Ordinul maxim al minorilor $\neq 0$ ai matricii $P(s)$ este r.
2. $\Delta_{1P}(s) \mid \Delta_{2P}(s) \mid \ldots \mid \Delta_{rP}(s)$.

---

*) Este clar că începerea pasului 1° presupune că $\delta_{i-1}(s)$ divide toate elementele lui $P_i(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $\delta_i(s)$ sînt polinoamele monice rezultate din polinoamele $\frac{\Delta_{iP}(s)}{\Delta_{i-1,P}(s)}$ pentru $i = 1,2,\ldots,r$ respectiv.

4. Indiferent de matricele unimodulare $U(s)$, $V(s)$ care aduc $P(s)$ la forma diagonal canonică $\Lambda(s) = U(s)P(s)V(s)$, aceasta rezultă unică.

5. Toate matricile unimodular echivalente au aceeași formă diagonal canonică.

Punctele 4 și 5 de la observația 3 justifică,

DEFINIȚIA 8. Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice și fie $\Lambda(s)$ forma diagonal canonică echivalentă, avînd pe diagonala principală polinoamele monice nenule $\delta_1(s),\ldots,\delta_r(s)$, $r \leqslant p, m$ cu $\delta_1(s)|\delta_2(s)|\ldots|\delta_r(s)$. Acei $\delta_i(s)$ cu $\partial[\delta_i(s)] \neq 0$, deci neinversabile, se numesc *factorii invarianți* ai matricii $P(s)$.

DEFINIȚIA 9. Fie $P(s)$, $Q(s)$ și $G(s)$ trei matrici. Dacă $P(s) = G(s)Q(s)$, $Q(s)(G(s))$ se numește un divizor la dreapta (la stînga) al lui $P(s)$, iar $P(s)$ se numește un multiplu la dreapta (stînga) al lui $G(s)(Q(s))$.

DEFINIȚIA 10. Fie $P(s)$ și $R(s)$ două matrici cu același număr de coloane (linii). $D(s)$ este un divizor comun al dreapta (stînga) al lui $P(s)$ și $R(s)$ dacă este simultan un divizor la dreapta (stînga) atît la lui $P(s)$ cît și al lui $R(s)$.

$D(s)$ este un c.m.m.d.c. la dreapta (stînga) al lui $P(s)$ și $R(s)$ dacă este un divizor comun la dreapta (stînga) al lui $P(s)$ și $R(s)$ și este un multiplu la stînga (dreapta) al oricărui alt divizor comun la dreapta (stînga) al lui $P(s)$ și $R(s)$.

Definiția 10 se extinde imediat pentru mai mult de două matrici cu același număr de coloane (linii).

TEOREMA 4. *Două matrici $P(s)$ și $R(s)$ cu același număr de coloane (linii) au un c.m.m.d.c. la dreapta (stînga).*

Demonstrația se face constructiv prin Algoritmul CMMDC. În acest sens se construiește :

$$Q(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

și se aduce cu ajutorul algoritmului ATR la forma superior-triunghiulară la dreapta, adică

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ 0 \end{bmatrix} = U(s)Q(s) \triangleq \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

unde $D(s)$ este pătrată (s-a presupus că $Q(s)$ are mai multe coloane decît linii) și superior triunghiulară la dreapta, iar $U(s)$ este unimodulară. Din relația (1) rezultă

$$\begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = U^{-1}(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

sau încă

$$\begin{aligned} P(s) &= V_{11}(s)D(s) \\ R(s) &= V_{21}(s)D(s) \end{aligned} \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

relaţii care arată că $D(s)$ este un divizor comun la dreapta al lui $P(s)$ şi $R(s)$. De asemenea, din (1) avem şi

$$D(s) = U_{11}(s)P(s) + U_{12}(s)R(s) \tag{3}$$

ceea ce evidenţiază faptul că $D(s)$ este un multiplu la stînga al oricărui alt divizor comun la dreapta al lui $P(s)$ şi $R(s)$ şi în consecinţă $D(s)$ este un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $P(s)$ şi $R(s)$. Pentru enunţul din paranteză al teoremei se consideră matricea $[P(s)\ \ R(s)]$ şi se aduce la forma inferior triunghiulară la stînga.

COROLARUL 3. Dacă $P(s)$ (sau $R(s)$) este nesingulară, atunci $D(s)$ este nesingulară, aceasta rezultînd imediat din relaţiile (2).

COROLARUL 4. Dacă $D(s)$ şi $F(s)$ sînt doi c.m.m.d.c. la dreapta (stînga) ai lui $P(s)$ şi $R(s)$ cu $P(s)$ (sau $R(s)$) nesingulară, atunci aceşti divizori sînt unimodular echivalenţi la stînga (dreapta).

Într-adevăr, conform corolarului 3, $D(s)$ şi $F(s)$ sînt matrici nesingulare, iar conform definiţiei 9 avem : $D(s) = U(s)F(s)$ şi $F(s) = V(s)D(s)$ cu $U(s)$ şi $V(s)$ matrici polinomiale. Atunci se poate scrie, de exemplu, $D(s) = U(s)V(s)D(s)$ de unde rezultă că $U(s)V(s) = I$ (şi analog $V(s)\ U(s) = I$), ceea ce arată că $U(s)$ şi $V(s)$ sînt inversabile şi deci unimodulare.

Se justifică acum

DEFINIŢIA 11. Două matrici $P(s)$ şi $R(s)$ cu acelaşi număr de coloane (linii) se numesc relativ prime la dreapta (stînga) sau coprime la dreapta (stînga), dacă oricare c.m.m.d.c. la dreapta (stînga) al lor este o matrice unimodulară.

Din relaţia (3) avem imediat

COROLARUL 5. Dacă $P(s)$ şi $R(s)$ sînt coprime la dreapta atunci există matricile $M(s)$ şi $N(s)$, astfel încît

$$M(s)P(s) + N(s)R(s) = I. \tag{4}$$

O relaţie duală se stabileşte pentru cazul cînd $P(s)$ şi $R(s)$ sînt coprime la stînga.

Avem

TEOREMA 5. *Fie $p \times m$ şi $m \times m$ matricile $R(s)$ şi respectiv $P(s)$, cu $P(s)$ nesingulară. Atunci $R(s)$ şi $P(s)$ sînt coprime la dreapta dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{rang}^{*)} \begin{bmatrix} P(s_0) \\ \hdashline R(s_0) \end{bmatrix} = m$$

pentru orice $s_0 \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. Conform cu teorema 4 se poate scrie

$$\begin{bmatrix} P(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

*) Este vorba de rangul unei matrici de numere.

Scanned with OKEN Scanner

unde $U(s)$ este unimodulară iar $D(s)$ este $m \times m$-nesingulară (vezi corolarul 3) şi în forma superior triunghiulară la dreapta, fiind un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $P(s)$ şi $R(s)$. Întrucît $|U(s_0)| = \text{ct} \neq 0$ pentru orice $s_0 \in \mathbb{C}$ este clar că

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P(s_0) \\ R(s_0) \end{bmatrix} = \text{rang } D(s_0) \quad \forall\, s_0 \in \mathbb{C}$$

Dacă $P(s)$ şi $R(s)$ sînt coprime, $D(s)$ este unimodulară şi deci rang $D(s_0)=m$, $\forall\, s_0 \in \mathbb{C}$ ($|D(s_0)| = \text{ct} \neq 0\ \forall\, s_0 \in \mathbb{C}$). Reciproc dacă rang $D(s_0)=m$, $\forall\, s_0 \in \mathbb{C}$ înseamnă că $|D(s_0)| = \text{ct}$, $\forall\, s_0 \in \mathbb{C}$ şi deci $D(s)$ este unimodulară. Conform cu corolarul 4 înseamnă că oricare c.m.m.d.c. la dreapta al lui $P(s)$ şi $R(s)$ este o matrice unimodulară şi în consecinţă $R(s)$ şi $P(s)$ sînt coprime la dreapta.

COROLARUL 6. Dacă $R(s)$ şi $P(s)$ sînt matricile din teorema 5, atunci ele sînt coprime la dreapta dacă şi numai dacă

$$\text{rang} \left[\begin{array}{c} P(s_0) \\ \hdashline R(s_0) \end{array} \right] = m$$

pentru orice s_0 care este rădăcină a lui $|P(s)|$.

COROLARUL 7. Dacă $R(s)$ şi $P(s)$ sînt $p \times m$ şi respectiv $p \times p$ matrici cu $P(s)$ nesingulară, atunci ele sînt coprime la stînga, dacă şi numai dacă

$$\text{rang } [P(s_0) \,|\, R(s_0)] = p, \quad \forall\, s_0 \in \mathbb{C}$$

În particular testul de rang este suficient să fie verificat numai pentru acei s_0 pentru care $|P(s_0)| = 0$.

Observaţia 4. Teoremele 4 şi 5 se extind imediat pentru mai mult de două matrici cu acelaşi număr de coloane (linii).

DEFINIŢIA 11. O matrice $P(s)$ se numeşte primă la dreapta (stînga) dacă oricare c.m.m.d.c. la dreapta (stînga) al liniilor (coloanelor) este o matrice unimodulară.

Avem imediat din teoremele 4 şi 5.

TEOREMA 6. *O $p \times m$ matrice $P(s)$ este primă la dreapta (stînga) dacă şi numai dacă rang $P(s_0) = m(p)$ pentru orice $s_0 \in \mathbb{C}$.*

COROLARUL 8. Orice submatrice de coloane (linii) a unei matrici unimodulare este primă la dreapta (stînga).

DEFINIŢIA 12. Fie $p \times m$ matricea $P(s)$. Matricea $P(s)$ se spune că are rangul r şi se notează $\rho^{*)}[P(s)] = r$, dacă conţine un minor de ordin r nenul, iar toţi minorii de ordin $> r$ (dacă există) sînt nuli.

Este clar că $\rho[P(s)] \leqslant \min(p, m)$.

Dacă $\rho[P(s)] = m$, matricea se spune că este de rang maximal coloană, iar dacă $\rho[P(s)] = p$, se spune că este de rang maximal linie.

---

*) A se face distincţie faţă de rang $P(s_0)$, $s_0 \in \mathbb{C}$, care este rangul unei matrici de numere.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 3. Două matrici $R(s)$ și $P(s)$ unimodular echivalente au același rang, adică $\rho[R(s)] = \rho[P(s)]$.

Demonstrația este o consecință imediată a punctelor 1 și 5 de la observația 3.

TEOREMA 7. *Fie $R(s)$ și $P(s)$ două $p \times m$ și respectiv $m \times q$ matrici, având rangurile $\rho[R(s)] = r$ și $\rho[P(s)] = p$. Fie $Q(s) = R(s)\,P(s)$ și $\rho[Q(s)] = q$. Atunci*

$$q \leqslant \min\{r, p\}$$

(inegalitatea lui Sylvester).

Demonstrație. Fie $R(s)$ și $P(s)$ aduse la forma Smith, adică

$$R(s) = U_R(s)\,\Lambda_R(s)\,V_R(s) \quad \text{și} \quad P(s) = U_P(s)\,\Lambda_P(s)\,V_P(s)$$

unde $\Lambda_R(s)$, $\Lambda_P(s)$ sînt diagonal canonice, iar $U_R(s)$, $V_R(s)$, $U_P(s)$ și $V_P(s)$ sînt unimodulare. Se poate scrie atunci

$$\hat{Q}(s) \triangleq U_R^{-1}(s)\,Q(s)\,V_P^{-1}(s) = \Lambda_R(s)\,W(s)\,\Lambda_P(s)$$

unde $W(s) \triangleq V_R(s)\,U_P(s)$, iar conform propoziției 3, $\rho[\hat{Q}(s)] = q$, $\rho[\Lambda_R(s)] = r$ $\rho[\Lambda_P(s)] = p$. Punem:

$$\Lambda_R(s) = \left[\begin{array}{c:c} \hat{\Lambda}_R(s) & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda_P(s) = \left[\begin{array}{c:c} \hat{\Lambda}_P(s) & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]$$

unde $\hat{\Lambda}_R(s)$ și $\hat{\Lambda}_P(s)$ sînt $r \times r$ și $p \times p$ diagonale și nesingulare, respectiv. Efectuînd acum, cu reprezentările de mai sus, produsul $\Lambda_R(s)\,W(s)\,\Lambda_P(s)$, rezultă

$$\hat{Q}(s) = \left[\begin{array}{c:c} \hat{W}(s) & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]$$

unde $\hat{W}(s)$ este o $r \times p$ matrice. Atunci $\rho[\hat{Q}(s)] = \rho[\hat{W}(s)] \leqslant \min\{r, p\}$ ceea ce demonstrează teorema.

COROLARUL 9. Fie $Q(s) = R(s)P(s)$. Dacă $R(s)$ ($P(s)$) este nesingulară atunci $\rho[Q(s)] = \rho[P(s)]$ $(= \rho[R(s)])$.

Demonstrație. Avem imediat $\rho[Q(s)] \leqslant \rho[P(s)]$. De asemenea, din $R^+(s)Q(s) = \text{diag}\,(|R(s)|)\,P(s)$ rezultă $\rho[R^+(s)\,Q(s)] = \rho[P(s)]$, de unde $\rho[P(s)] \leqslant \rho[Q(s)]$.

COROLARUL 10. Fie $Q(s) = R(s)\,P(s)$. Dacă $P(s)$ este de rang maximal linie ($R(s)$ este de rang maximal coloană), atunci $\rho[Q(s)] = \rho[R(s)] = (= \rho[P(s)])$.

Demonstrația rezultă imediat din corolarul 9.

Scanned with OKEN Scanner

Observația 5. Dacă o matrice $E(s)$ este în forma de eșalon redus pe linii (coloane), atunci numărul elementelor de tipul $e_{ij}(s)$ din definiția 5, este egal, ca o consecință directă a definiției 12, cu $\rho[E(s)]$. Rezultă de aici, pe baza propoziției 3, că o metodă de calcul a rangului unei matrice $P(s)$ (de altfel cea mai eficientă) este de a o aduce la forma de eșalon redus.

Fie acum o $p \times m$ matrice $P(s)$ cu $\rho[P(s)] = r$. Fie $\Delta_{rP}(s)$ c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul r ai matricei $P(s)$. Fie Z_P mulțimea zerourilor lui $\Delta_{rP}(s)$. Se constată imediat că

$$\text{rang } P(s_0) < \rho[P(s)] = r$$

dacă și numai dacă $s_0 \in Z_P$. Rezultă de aici

DEFINIȚIA 13. Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice cu $\rho[P(s)] = r$. $s_0 \in \mathbb{C}$ se numește un zero al lui $P(s)$ dacă

$$\text{rang } P(s_0) < r.$$

Pe baza celor de mai sus rezultă imediat că mulțimea Z_P a zerourilor unei matrici $P(s)$ de rang r este o mulțime finită și este mulțimea zerourilor c.m.m.d.c. al minorilor de ordinul r ai matricii $P(s)$.

PROPOZIȚIA 4. Două matrice unimodular echivalente au aceleași zerouri.

Demonstrația este o consecință banală a observației 2. Rezultă atunci imediat că pentru o matrice $P(s)$, Z_P este egală cu mulțimea zerourilor factorilor invarianți ai matricei $P(s)$.

De remarcat că pentru o matrice $P(s)$, Z_P poate fi vidă, în care caz matricea se spune că nu are zerouri. De exemplu, matricele unimodulare nu au zerouri. De asemenea, două matrice de rang egal nu au în mod obligator aceleași zerouri.

Determinarea zerourilor unei matrice $P(s)$ se face astfel:

1°. Se aduce $P(s)$ la forma $E(s)$ de eșalon redus pe linii, rezultînd

$$E(s) = \begin{bmatrix} \hat{E}(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2°. Se aduce $\hat{E}(s)$ la forma $\tilde{E}(s)$ de eșalon redus pe coloane, rezultînd

$$\tilde{E}(s) = [\bar{E}(s) \quad 0]$$

unde (în mod sigur) $\bar{E}(s)$ este pătrată și inferior triunghiulară la stînga.

Atunci zerourile polinoamelor de pe diagonala lui $\bar{E}(s)$ formează mulțimea Z_P (demonstrația procedurii este lăsată ca exercițiu cititorului).

Fie două matrice $R(s)$ și $P(s)$ cu același număr de coloane (linii) astfel încît $Q(s) = \left[\begin{array}{c} R(s) \\ \hdashline P(s) \end{array}\right]$ ($Q(s) = [R(s) \vdots P(s)]$) este de rang maximal coloană (linie). Zerourile unui c.m.m.d.c. la dreapta (stînga) $D(s)$ al liniilor (coloanelor) lui $Q(s)$ se numesc zerourile comune ale matricelor $R(s)$ și $P(s)$, iar zerourile lui $R(s)\,D^{-1}(s)$ ($D^{-1}(s)\,R(s)$) se numesc

zerourile lui $R(s)$ necomune cu cele ale lui $P(s)$ și în mod analog zerourile lui $P(s)\,D^{-1}(s)$ $(D^{-1}(s)\,P(s))$ se numesc zerourile lui $P(s)$ necomune cu cele ale lui $R(s)$.

Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice. Gradul coloanei j (liniei i) notat $\partial_{cj}[P(s)]$ $(\partial_{ri}[P(s)])$, este gradul maxim al polinoamelor care compun coloana j (linia i). $\Gamma_c[P(s)]$ $(\Gamma_r[P(s)])$ este $p \times m$ matricea în care fiecare coloană j, $j = 1, \ldots m$ (linie i, $i = 1, \ldots, p$) are ca elemente coeficienții corespunzători gradului $\partial_{cj}[P(s)]$ $(\partial_{ri}[P(s)])$ ai polinoamelor care compun coloana j (linia i). Evident, un polinom de grad strict mai mic decît $\partial_{cj}[P(s)]$ $(\partial_{ri}[P(s)])$ va interveni cu coeficientul zero.

Definiția 14. O $p \times m$ matrice $P(s)$ se numește coloană proprie (linie proprie) dacă $\Gamma_c[P(s)]$ $(\Gamma_r[P(s)])$ este de rang maximal coloană (linie).

Fie $P(s)$ o $p \times p$ matrice. Atunci, (demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului,) polinomul $|P(s)|$ se exprimă în forma

$$|P(s)| = a_0 s^d + a_1 s^{d-1} + \ldots + a_d \tag{5}$$

sau

$$|P(s)| = a'_0 s^{d'} + a'_1 s^{d'-1} + \ldots + a'_{d'} \tag{6}$$

unde

$$a_0 = |\Gamma_c[P(s)]|, \quad a'_0 = |\Gamma_r[P(s)]|$$

iar

$$d \triangleq \sum_{j=1}^{p} \partial_{cj}[P(s)], \quad d' \triangleq \sum_{i=1}^{p} \partial_{ri}[P(s)].$$

Evident, dacă $p \times p$ matricea $P(s)$ este coloană (linie) proprie atunci, și numai atunci, $a_0 \neq 0 (a'_0 \neq 0)$.

Așadar, pentru orice $p \times p$ matrice $P(s)$ avem

$$\partial\,[|P(s)|] \leqslant d, d' \tag{7}$$

egalitatea avînd loc pentru d, respectiv d', definiți mai sus, dacă și numai dacă $P(s)$ este coloană respectiv linie proprie.

De remarcat că dacă o matrice oarecare este coloană proprie ea nu este în mod necesar și linie proprie.

Pe baza celor de mai sus rezultă imediat că dacă matricea arbitrară $P(s)$ este coloană (linie) proprie, atunci ea este de rang maximal coloană (linie).

Teorema 8. *Orice $p \times m$ matrice $P(s)$ de rang maximal coloană (linie) este unimodular echivalentă la dreapta (stînga) cu o matrice coloană (linie) proprie.*

Demonstrația se face constructiv prin „Algoritmul ACP".

0°. Se construiește matricea:

$$A(s) = \begin{bmatrix} P(s) \\ \cdots\cdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

1°. Se construiește $\Gamma_c[P(s)]$ și se determină rang $\Gamma_c[P(s)] = q^*)$ prin construirea bazei lui $\mathrm{Im}\,\Gamma_c[P(s)]$ formată din primele coloane liniar independente (de la stînga la dreapta) ale lui $\Gamma_c[P(s)]$. Dacă $q = m$, algoritmul se oprește. Dacă $q < m$, se trece la pasul 2°.

2°. Se localizează o coloană liniar dependentă (de bază, de exemplu prima de la stînga la dreapta) din $\Gamma_c[P(s)]$. Fie $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_q}$ coloanele bazei lui $\mathrm{Im}\,\Gamma_c[P(s)]$ și fie $C_{j_{q+1}}$ coloana liniar dependentă. Atunci avem

$$\lambda_1 C_{j_1} + \lambda_2 C_{j_2} + \ldots + \lambda_q C_{j_q} + \lambda_{q+1} C_{j_{q+1}} = 0 \ (\lambda_{q+1} = 1).$$

Fie $d_i \triangleq \partial_{cji}[P(s)]$, $i = 1,2, \ldots, q, q+1$ și fie $d_0 \triangleq \max\{d_i \mid i=1,2,\ldots, \ldots, q, q+1\}$. Fie j_k indicele primei coloane (de la stînga la dreapta) din $P(s)$ care are gradul d_0.

Se efectuează în $A(s)$ asupra coloanei j_k operația (unimodulară) de substracție

$$\lambda_k \widetilde{C}_{j_k}(s) + \lambda_1 s^{d_0-d_1} \widetilde{C}_{j_1}(s) + \ldots + \lambda_{k-1} s^{d_0-d_{k-1}} \widetilde{C}_{j_{k-1}}(s) +$$

$$+ \lambda_{k+1} s^{d_0-d_{k+1}} \widetilde{C}_{j_{k+1}}(s) + \ldots + \lambda_{q+1} s^{d_0-d_{q+1}} \widetilde{C}_{j_{q+1}}(s)$$

unde $\widetilde{C}_j(s)$, $j = 1, \ldots, m$ sînt coloanele lui $A(s)$.

În acest fel, datorită dependenței liniare dintre coloanele C_{j_i} scrisă mai sus, gradul coloanei j_k din $P(s)$ devine strict mai mic decît d_0.

Se reia algoritmul de la pasul 1°.

Observația 6. Este clar că în acord cu propoziția 3 operațiile de substracții pe coloane la nivelul lui $P(s)$ nu afectează rangul maximal coloană al acesteia. Prin repetarea pașilor algoritmului se obține o scădere strictă a sumei gradelor coloanelor lui $P(s)$. Astfel în ipoteza conservării maximalității rangului lui $P(s)$ și ținînd cont de relațiile (5) și (7), algoritmul se oprește în mod sigur, rezultînd în $A(s)$, în locul lui $P(s)$ matricea coloană proprie $P_c(s)$, iar .în locul matricii I_p, matricea unimodulară $U(s)$ astfel încît

$$P_c(s) = P(s)U(s).$$

Pentru enunțul din paranteză al teoremei 8 se aplică ACP lui $A^T(s)$, unde $A(s) = [P(s) \vdots I_p]$, după care rezultatul se retranspune.

Pentru o $p \times m$ matrice *coloană proprie* $P(s)$ *notăm* $d_i \triangleq \partial_{ci}[P(s)]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. În cele ce urmează vom pune în evidență o proprietate remarcabilă a numerelor d_i. În prealabil, avem nevoie de

LEMA 1. Fie $P(s) = [P_1(s) \ldots P_m(s)]$ o $p \times m$ matrice coloană proprie și fie $C(s) = \mathrm{col}\ (c_i(s))$ o $m \times 1$ matrice în care $c_{i_j}(s) \neq 0$ pentru $j = 1, 2, \ldots, q \leqslant m$. Fie $\alpha_{i_j} \triangleq \partial[c_{i_j}(s)]$, $j = 1, \ldots, q$ și $\delta \triangleq \partial_c[P(s)C(s)]$ (unde evident $P(s)C(s) \neq 0$). Atunci

(i) $\delta = \max\limits_j (d_{i_j} + \alpha_{i_j})$

---

*) Calculul rangului se face prin aducerea matricii de numere reale $\Gamma_c[P(s)]$ la forma de eșalon redus pe linii. În acest sens, cititorul poate particulariza teorema 1 la corpul numerelor reale, luînd în considerare și observația 5.

Scanned with OKEN Scanner

(ii) $\Gamma_c[P(s)C(s)]s^{\delta} = \Gamma_c[P(s)]\text{diag}(s^{d_i})\hat{C}(s)$ unde $\hat{C}(s)$ este o $m \times 1$ matrice monomială adecvat aleasă.

(iii) $\Gamma_c[P(s)C(s)] = \Gamma_c[P(s)]\,\hat{C}$

unde $\hat{C}$ este matricea coeficienților monoamelor din $\hat{C}(s)$.

Demonstrație. Punem

$P_i(s) = C_i s^{d_i}$ + termeni de grad mai mic și

$c_{i_j}(s) = a_{i_j} s^{\alpha_{i_j}}$ + termeni de grad mai mic, $a_{i_j} \neq 0$ pentru $j = 1, \ldots, q$. Atunci

$$P(s)\,C(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i(s)\,P_i(s) = \sum_{j=1}^{q} c_{i_j}(s)\,P_{i_j}(s) =$$

$$= a_{i_1}C_{i_1}s^{d_{i_1}+\alpha_{i_1}} + \ldots + a_{i_q}C_{i_q}s^{d_{i_q}+\alpha_{i_q}} + \text{termeni de grad formal mai mic}$$

Fie $\gamma = \max_j (d_{i_j} + \alpha_{i_j})$. Atunci se poate scrie încă

$P(s)\,C(s) = (a_{i_{j_1}}C_{i_{j_1}} + \ldots + a_{i_{j_r}}C_{i_{j_r}})\,s^{\gamma}$ + termeni de grad forma mai mic, $r \leqslant q$.

Cum $\Gamma_c[P(s)] = [C_1 \ldots C_m]$ este de rang maximal coloană, iar $a_{i_{j_k}} \neq 0$, $k = 1, \ldots, r$ este clar că

$$\Gamma_c[P(s)C(s)] = a_{i_{j_1}}C_{i_{j_1}} + \ldots + a_{i_{j_r}}C_{i_{j_r}}$$

și în consecință $\delta = \gamma$, punctul (i) fiind demonstrat.

Pentru a demonstra punctul (ii), scriem în continuare

$$\Gamma_c[P(s)\,C(s)]\,s^{\delta} = [C_1 s^{d_1} \vdots \ldots \vdots C_m s^{d_m}] \begin{bmatrix} 0 \\ a_{i_{j_1}} s^{\alpha_{i_{j_1}}} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{i_{j_r}} s^{\alpha_{i_{j_r}}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\triangleq \Gamma_c[P(s)]\ \text{diag}\ (s^{d_i})\ \hat{C}(s)$$

unde se vede că $\hat{C}(s)$ astfel definită, este monomială.

Punctul (iii) al lemei rezultă imediat din ultima egalitate de mai sus, lema fiind astfel complet demonstrată.

LEMA 2. Fie $\bar{P}(s)$ și $\bar{Q}(s)$ două $p \times m$ matrice coloană proprie cu coloanele astfel permutate încît gradele acestora să fie în ordine crescătoare. Atunci, dacă $\bar{Q}(s) = \bar{P}(s)W(s)$ (unde $W(s)$ este evident $m \times m$ și nesingulară) rezultă $\partial_{ci}[\bar{P}(s)] \leqslant \partial_{ci}[\bar{Q}(s)]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $d_i \triangleq \partial_{ci}[\bar{P}(s)]$ și $d'_i \triangleq \partial_{ci}[\bar{Q}(s)]$ cu $i = 1,2, \ldots, m$ și fie $\Gamma_c \triangleq \Gamma_c[\bar{P}(s)]$, $\Gamma'_c = \Gamma_c[\bar{Q}(s)]$. Atunci aplicînd lema 1, avem

$$\Gamma'_c \operatorname{diag}(s^{d'_i}) = \Gamma_c \operatorname{diag}(s^{d_i})\ \hat{W}(s)$$

unde $\hat{W}(s)$ este o $m \times m$ matrice monomială adecvat aleasă și evident nesingulară. Fie Γ_c^s o inversă la stînga a lui Γ_c și fie $\Gamma = [\gamma_{ij}] \triangleq \Gamma_c^s \Gamma'_c$. Atunci avem

$$\operatorname{diag}(s^{-d_i})\Gamma \operatorname{diag}(s^{d'_i}) = [\gamma_{ij} s^{d'_j - d_i}] = \hat{W}(s).$$

Rezultă că $[\gamma_{ij}\, s^{d'_j - d_i}]$ este o matrice *monomială* și *nesingulară*. Atunci cel puțin unul din produsele $\gamma_{1j_1} \cdot \gamma_{2j_2} \cdot \ldots \cdot \gamma_{mj_m}$, unde $j_1, \ldots, j_m$ este o permutare a șirului $1, 2, \ldots, m$. este nenul, adică $\gamma_{1j_1}, \ldots, \gamma_{mj_m}$ sînt toți nenuli și în consecință $d'_j \geqslant d_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Ținînd cont că $d_1 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant d_m$ și $d'_1 \leqslant \ldots \leqslant d'_m$, rezultă (exercițiu pentru cititor) că $d_i \leqslant d'_i$ cu $i = 1, 2, \ldots, m$, lema fiind complet demonstrată.

Avem acum rezultatul principal dat de

TEOREMA 9. *Fie $P(s)$ și $Q(s)$ două $p \times m$ matrici de rang maxima coloană unimodular echivalente la dreapta. Fie $P(s)$ și $Q(s)$ aduse, prin operații unimodulare asupra coloanelor (vezi teorema 8), la forma coloană proprie $\bar{P}(s)$ și respectiv $\bar{Q}(s)$, cu coloanele permutate adecvat, astfel încît gradele acestora să fie în ordine crescătoare (de la stînga la dreapta). Atunci $\partial_{ci}[\bar{P}(s)] = \partial_{ci}[\bar{Q}(s)]$, $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstrație. Este clar că există o matrice unimodulară $U(s)$, astfel încît $\bar{Q}(s) = \bar{P}(s)\, U(s)$ și în consecință avem și $\bar{P}(s) = \bar{Q}(s)\, V(s)$ unde $V(s) = U^{-1}(s)$. Atunci aplicînd de două ori lema 2, obținem rezultatul dorit.

COROLARUL 11. Fie $\bar{P}(s)$ și $\bar{Q}(s)$ două $p \times m$ matrici coloană proprie, cu coloanele permutate corespunzătoare, astfel încît gradele acestora să fie în ordine crescătoare. Fie $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_q$ valorile distincte ale gradelor coloanelor lui $\bar{P}(s)$. Partiționăm $\bar{P}(s)$ în forma

$$\bar{P}(s) = [\underbrace{\bar{P}_1(s)}_{p_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\bar{P}_l(s)}_{p_l}]$$

unde toate coloanele unei $p \times p_i$ matrici $\bar{P}_i(s)$ au gradele egale cu δ_i, $i = 1,2, \ldots, l$.

Considerăm două cazuri corespunzătoare lemei 2 și respectiv teoremei 9.

Cazul 1. Presupunem că există o matrice $W(s)$ astfel încît $\bar{Q}(s) = \bar{P}(s)\, W(s)$. Conform lemei 2 avem $\partial_{ci}[\bar{P}(s)] \leqslant \partial_{ci}[\bar{Q}(s)]$, $i = 1,2, \ldots, m$. Se poate în consecință partiționa $\bar{Q}(s)$ în forma

$$\bar{Q}(s) = [\underbrace{\bar{Q}_1(s)}_{q_1} \vdots \ldots \vdots \underbrace{\bar{Q}_l(s)}_{q_l}]$$

unde toate gradele coloanelor $p \times q_i$ matricii $\bar{Q}_i(s)$ sînt *mai mari sau egale cu δ_i și strict mai mici decît δ_{i+1}* cu $i = 1, 2, \ldots, l-1$ (evident, se poate întîmpla ca $q_i = 0$ pentru $i \geqslant i_0 \geqslant 1$).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci matricea $W(s)$ este de forma

$$W(s) = \begin{bmatrix} \overbrace{W_{11}(s)}^{q_1} & \overbrace{W_{12}(s)}^{q_2} & \dots & \overbrace{W_{1l}(s)}^{q_l} \\ 0 & W_{22}(s) & \dots & W_{2l}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_{ll}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \\ \} p_2 \\ \\ \} p_l \end{matrix}$$

unde $W_{ii}(s)$ sînt $p_i \times q_i$, $i=1, 2, \dots, l$.

Cazul 2. Presupunem că există o matrice unimodulară $U(s)$, astfel încît $\bar{Q}(s) = \bar{P}(s)U(s)$. Conform teoremei 9, $\bar{Q}(s)$ se partiţionează identic cu $\bar{P}(s)$, adică

$$\bar{Q}(s) = [\underbrace{\bar{Q}_1(s)}_{p_1} \vdots \dots \vdots \underbrace{\bar{Q}_l(s)}_{p_l}]$$

unde $p \times p_i$ matricile $\bar{Q}_i(s)$ au toate gradele coloanelor egale cu δ_i, $i = 1, 2, \dots, l$. Atunci matricea $U(s)$ este de forma

$$U(s) = \begin{bmatrix} \overbrace{U_{11}}^{p_1} & \overbrace{U_{12}(s)}^{p_2} & \dots & \overbrace{U_{1l}(s)}^{p_l} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2l}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & U_{ll} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p_1 \\ \} p_2 \\ \\ \} p_l \end{matrix}$$

unde U_{ii} sînt $p_i \times p_i$ matrici constante, $i = 1, 2, \dots, l$.

Demonstraţia este o consecinţă imediată a punctului (i) din lema 1 combinat cu modul de dispunere al gradelor coloanelor în partiţiile de mai sus.

Teorema 9 justifică :

DEFINIŢIA 15. Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice de rang maximal coloană şi $\bar{P}(s)$ matricea coloană proprie obţinută prin operaţii unimodulare asupra coloanelor lui $P(s)$. Atunci $d_i \triangleq \partial_{ci}[\bar{P}(s)]$, $i = 1, \dots, m$ ordonaţi crescător se numesc invarianţii Kronecker coloană ai lui $P(s)$. În mod analogse definesc invarianţii Kronecker linie ai unei matrici de rang maximal linie.

Din teorema 9 rezultă imediat că *două matrici de rang maximal coloană (linie) unimodular echivalente la dreapta (stînga) au aceeaşi invarianţi Kronecker coloană (linie).*

DEFINIŢIA 16. O $p \times m$ matrice $T(s)$ cu elemente din corpul $\mathbb{R}(s)$ se numeşte matrice raţională (peste $\mathbb{R}(s)$).

Observaţia 7. Dezvoltările de mai sus referitoare la matricile polinomiale au făcut uz în exclusivitate de faptul că elementele acestora sînt din inelul $\mathbb{R}[s]$. Faţă de definiţia 15 o matrice polinomială poate fi considerată ca un caz particular de matrice raţională, în care caz, elementele acesteia se consideră în $\mathbb{R}(s)$.

În acest sens, dacă matricea polinomială $P(s)$, privită ca matrice raţională, este nesingulară atunci $P^{-1}(s)$ are sens ca matrice raţională (a se compara cu propoziţia 1).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice raţională astfel scrisă încît numitorii elementelor componente sînt monici. Fie $\pi(s)$ c.m.m.m.c. al numitorilor elementelor lui $T(s)$, care este monic. Prin aducerea la acelaşi numitor a elementelor lui $T(s)$, aceasta se scrie

$$T(s) = \frac{P(s)}{\pi(s)} \tag{8}$$

unde $P(s)$ este o matrice polinomială formată din numărătorii elementelor lui $T(s)$, după ce aceştia au fost aduşi la acelaşi numitor comun.

Rangul unei matrici raţionale $T(s)$ se defineşte în aceeaşi manieră ca în definiţia 12 (înlocuindu-se $P(s)$ cu $T(s)$) şi se notează cu $\rho[T(s)]$. Din reprezentarea (8) se vede imediat că $\rho[T(s)] = \rho[P(s)]$, rezultînd imediat din (8), valabilitatea teoremei 7 şi a corolarelor 9 şi 10 pentru matrici raţionale.

Fie acum $P(s)$ din (8) adusă la forma Smith unică $\Lambda(s)$, adică

$$\Lambda(s) = U(s)P(s)V(s)$$

unde $U(s)$ şi $V(s)$ sînt unimodulare şi unde

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \delta_1(s) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_r(s) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

cu $\delta_i(s)$, $i = 1, \ldots, r$ monice şi $\delta_1(s) \mid \delta_2(s) \mid \ldots \mid \delta_r(s)$. Atunci

$$\frac{\Lambda(s)}{\pi(s)} = U(s)\frac{P(s)}{\pi(s)}V(s) = U(s)\,T(s)\,V(s) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_1(s)}{\pi(s)} & & & & \\ & \dfrac{\delta_2(s)}{\pi(s)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \dfrac{\delta_r(s)}{\pi(s)} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $\frac{\delta_i(s)}{\pi(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$, $i = 1, \ldots, r$. unde membrul drept este *ireductibil*, rezultă

$$U(s)\ T(s)\ V(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & & \\ & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

unde $\varepsilon_i(s)$, $\psi_i(s)$ sînt monice și relativ prime, $i = 1, \ldots, r$, iar $\varepsilon_1(s) \mid \varepsilon_2(s) \mid \ldots \ldots \mid \varepsilon_r(s)$ și $\psi_r(s) \mid\mid \psi_{r-1}(s) \mid \ldots \mid \psi_1(s)$. Se vede imediat că $\pi(s) = \psi_1(s)$.

DEFINIȚIA 17. Matricea rațională diagonală din membrul drept al relației de mai sus se numește forma Mc Millan a matricii raționale $T(s)$. Forma Mc Millan este unică.

PROPOZIȚIA 5. Orice $p \times m$ matrice rațională $T(s)$ se poate factoriza la dreapta, respectiv la stînga, adică

$$T(s) = R(s)\ P_c^{-1}(s) \text{ respectiv } T(s) = P_o^{-1}(s)\ Q(s)$$

unde $R(s)$, $Q(s)$, $P_c(s)$ și $P_o(s)$ sînt matrici polinomiale de dimensiuni corespunzătoare.

Demonstrația se face constructiv. Fie $T(s)$ reprezentată prin coloanele, respectiv liniile sale

$$T(s) = [C_1(s) \ldots C_m(s)],\ T(s) = \begin{bmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_p(s) \end{bmatrix}$$

Fie $p_{ci}(s)$, $i = 1, \ldots, m$ și $p_{oj}(s)$, $j = 1, \ldots, p$ c.m.m.m.c al numitorilor elementelor care compun coloana i respectiv linia j.
Atunci se poate scrie

$$T(s) = \left[\frac{\widetilde{C}_1(s)}{p_{c1}(s)} \ldots\ldots \frac{\widetilde{C}_m(s)}{p_{cm}(s)} \right] = [\widetilde{C}_1(s) \ldots \widetilde{C}_m(s)]\ (\text{diag}\ (p_{ci}(s))^{-1} =$$

$$\stackrel{\Delta}{=} R(s)\ P_c^{-1}(s)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\widetilde{C}_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$ sînt coloane polinomiale și respectiv

$$T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\widetilde{L}_1(s)}{p_{o1}(s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{L_p(s)}{p_{op}(s)} \end{bmatrix} = (\text{diag}\,(p_{oj}(s))^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{L}_1(s) \\ \vdots \\ \widetilde{L}_p(s) \end{bmatrix} \triangleq P_o^{-1}(s)\, Q(s)$$

unde $\widetilde{L}_j(s)$, $j = 1, \ldots, p$ sînt linii polinomiale.

Observația 8. În fond reprezentarea (8) este, de asemenea, o factorizare la dreapta, sau la stînga, după cum este scrisă $T(s) = P(s)$ (diag $(\pi(s))_m^{-1} = (\text{diag}\ (\pi(s)))_p^{-1} P(s)$, indicii m și p precizînd numărul elementelor diagonale.

Într-o factorizare oarecare la dreapta (stînga) $R(s)$ $(Q(s))$ și $P_c(s)$ $(P_o(s))$ reprezintă un *numărător* și respectiv un *numitor* la dreapta (stînga) al lui $T(s)$. Rezultă imediat că $\rho[T(s)]$ *este egal cu rangul numărătorului oricărei factorizări* (la dreapta sau stînga) a lui $T(s)$, procedura de calcul a lui $\rho[T(s)]$ rezultînd în consecință.

Definiția 18. Fie $T(s)$ o matrice rațională. $T(s) = R(s)\ P_c^{-1}(s)$ $(= P_c^{-1}(s)\ Q(s)\ )$ se numește o factorizare primă la dreapta (stînga), dacă $R(s)$ $(Q(s))$ și $P_c(s)$ $(P_0(s))$ sînt coprime la dreapta (stînga).

Propoziția 6. Orice matrice rațională $T(s)$ se poate factoriza prim la dreapta (stînga).

Demonstrație. Fie $T(s) = \widetilde{R}(s)\ \widetilde{P}_c^{-1}(s)$ o factorizare oarecare la dreapta și $\widetilde{D}(s)$ un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $\widetilde{R}(s)$ și $\widetilde{P}_c(s)$ adică $\widetilde{R}(s) = R(s)\ \widetilde{D}(s)$, $\widetilde{P}_c(s) = P_c(s)\ D(s)$. Atunci $T(s) = \widetilde{R}(s)\ \widetilde{P}_c^{-1}(s) = R(s)\ D(s)\ D^{-1}(s)$ $P_c^{-1}(s) = R(s)\ P_c^{-1}(s)$, ultima factorizare fiind primă la dreapta.

Corolarul 12. Orice matrice rațională $T(s)$ se poate factoriza prim la dreapta (stînga) cu numărătorul la dreapta (stînga) coloană (linie) proprie.

Într-adevăr, fie $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s)$ o factorizare primă la dreapta conform cu teorema 8, există o matrice unimodulară $U(s)$, astfel încît $\bar{P}_c(s) = P_c(s)\ U(s)$ este coloană proprie. Atunci $T(s) = (R(s)\ U(s)\ ((P_c(s)$ $U\ (s))^{-1} = \bar{R}(s)\ \bar{P}_c^{-1}(s)$ este factorizarea căutată.

Teorema 10. [*Wolovich*] *Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice rațională. Atunci*

1. Două factorizări prime la dreapta (stînga) ale lui $T(s)$ au numărătorii și numitorii unimodular echivalenți la dreapta (stînga).

2. Două factorizări prime oarecare ale lui $T(s)$ au numărătorii unimodular echivalenți, iar determinanții numitorilor asociați în divizibilitate.

Demonstrație. 1. $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s) = \bar{R}(s)\bar{P}_c^{-1}(s)$ două factorizări prime la dreapta. Atunci, conform cu corolarul 5, există matricile polinomiale $M(s)$ și $N(s)$, astfel încît:

$$M(s)R(s) + N(s)P_c(s) = I$$

sau

$$M(s)\ R(s)P_c^{-1}(s) + N(s) = P_c^{-1}(s)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau încă

$$M(s)\bar{R}(s)\bar{P}_c^{-1}(s) + N(s) = P_c^{-1}(s)$$

şi în definitiv

$$M(s)\,\bar{R}(s) + N(s)\bar{P}_c(s) = P_c^{-1}(s)\bar{P}_c(s)$$

Membrul stîng fiind polinomial rezultă că $D(s) \triangleq P_c^{-1}(s)\bar{P}_c(s)$ este o matrice polinomială şi conform cu (3) $D(s)$ este un c.m.m.d.c. la dreapta al lui $\bar{R}(s)$ şi $\bar{P}_c(s)$ fiind în consecinţă o matrice unimodulară. Aşadar, $\bar{P}_c(s) = P_c(s)\,D(s)$ rezultînd imediat şi $\bar{R}(s) = R(s)D(s)$. Analog se face demonstraţia şi pentru două factorizări prime la stînga.

2. Fie acum două factorizări prime oarecare ale lui $T(s)$, interesant fiind cazul $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s) = P_o^{-1}(s)\,Q(s)$.

Fie $T(s)$ adusă la forma (unică) McMillan.

$$U(s)T(s)\,V(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

unde $U(s)$ şi $V(s)$ sînt unimodulare.

Fie $\mathfrak{E}(s)$ $p \times m$ matricea polinomială în care toate elementele sînt nule cu excepţînd primele r elemente de pe diagonala principală care sînt egale $\varepsilon_1(s)\ ,\ldots,\ \varepsilon_r(s)$. Fie

$$\Psi_c(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\psi_i(s)) & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{bmatrix} \text{ şi } \Psi_o(s) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\psi_i(s)) & 0 \\ 0 & I_{p-r} \end{bmatrix}$$

Atunci rezultă şirul de egalităţi evidente

$$U(s)T(s)V(s) = \mathfrak{E}(s)\,\Psi_c^{-1}(s) = \Psi_0^{-1}(s)\,\mathfrak{E}(s) = U(s)\,R(s)\,P_c^{-1}(s)\,V(s) = \\ = U(s)P_o^{-1}(s)\,Q(s)\,V(s). \qquad (*)$$

Dar

$$\mathfrak{E}(s)\,\Psi_c^{-1}(s) = (U(s)\,R(s))\,(V^{-1}(s)\,P_c(s))^{-1}$$

şi

$$\Psi_o^{-1}(s)\,\mathfrak{E}(s) = (P_o(s)\,U^{-1}(s))^{-1}\,(Q(s)\,V(s)).$$

Atunci pe baza rezultatului de la pct. 1, al teoremei

$$U_D(s) \triangleq (V^{-1}(s)\,P_c(s))^{-1}\,\Psi_c(s) = P_c^{-1}(s)\,V(s)\,\Psi_c(s)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$U_S(s) \triangleq \Psi_o(s)\,(P_o(s)U^{-1}(s))^{-1} = \Psi_o(s)\,U(s)\,P_o^{-1}(s)$$

sînt matrici unimodulare. Din șirul de egalități (*) rezultă atunci

$$\mathfrak{E}(s) = U(s)\,R(s)\,P_c^{-1}(s)\,V(s)\Psi_c(s) = \Psi_o(s)\,U(s)\,P_o^{-1}(s)\,Q(s)V(s)$$

adică

$$U(s)R(s)U_D(s) = U_S(s)\,Q(s)V(s) = \mathfrak{E}(s) \qquad (**)$$

egalitate ce arată că $R(s)$ și $Q(s)$ sînt unimodular echivalente. În fine, din expresiile de definiție ale lui $U_D(s)$ și $U_S(s)$ și din faptul că $|\Psi_c(s)| = |\Psi_o(s)|$, rezultă că $|P_c(s)|$ și $|P_o(s)|$ sînt asociați în divizibilitate.

Din definiția 13, propoziția 4 și teorema 10 de mai sus, capătă un sens precis,

DEFINIȚIA 19. Zerourile și polii la distanță finită*) ale unei matrice raționale $T(s)$ sînt zerourile numărătorului și respectiv numitorului oricărei factorizări prime ale lui $T(s)$.

COROLARUL 13. Din expresiile de definire a matricelor unimodulare $U_D(s)$ și $U_S(s)$ rezultă imediat că $\Psi_c(s) = V^{-1}(s)\,P_c(s)\,U_D(s)$ și $\Psi_o(s) = U_S(s)P_o(s)U^{-1}(s)$. Luînd în considerare și expresia (**) din teorema de mai sus, rezultă că $\mathfrak{E}(s)$ și $\Psi_c(s)$**) ($\Psi_o(s)$) *sînt formele Smith unice ale numărătorului și respectiv numitorului oricărei factorizări prime la dreapta (stînga) ale matricii raționale* $T(s)$. Rezultă, de asemenea, imediat că *zerourile și polii lui* $T(s)$ *sînt zerourile lui* $\mathfrak{E}(s)$ *și respectiv zerourile lui* $\Psi_c(s)$ *sau* $\Psi_o(s)$.

DEFINIȚIA 20. O matrice rațională se numește proprie (strict proprie) dacă toate elementele ei sînt proprii (strict proprii).

Evident, $T(s)$ este proprie dacă și numai dacă $\lim_{s\to\infty} T(s)$ există și este o matrice constantă (finită) iar $T(s)$ este strict proprie dacă și numai dacă $\lim_{s\to\infty} T(s) = 0$.

PROPOZIȚIA 7. Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice rațională și $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ o factorizare la dreapta sa. Atunci dacă $T(s)$ este proprie (strict proprie) $\partial_{cj}[R(s)] \leqslant (<)\ \partial_{cj}[P(s)]$, $j = 1,2,\ldots,m$, inegalități care se scriu convențional condensat în forma

$$\partial_c[R(s)] \leqslant (<)\ \partial_c[P(s)].$$

Demonstrație. Fie $T(s) = [t_{jk}(s)]$, $P(s) = [p_{jk}(s)]$ și $R(s) = [r_{jk}(s)]$. Atunci din $R(s) = T(s)P(s)$ avem

$$r_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{m} t_{ik}(s)\,p_{kj}(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{t}_{ik}(s)\,p_{kj}(s)}{t_i(s)}$$

unde $t_{ik}(s) = \dfrac{\hat{t}_{ik}(s)}{t_i(s)}$, $\hat{t}_{ik}(s)$ și $t_i(s)$ fiind polinoame cu $\partial[\hat{t}_{ik}(s)] \leqslant (<)\ \partial[t_i(s)]$ și unde $t_i(s)$ este c.m.m.m.c. al numitorului liniei i din $T(s)$.

*) În teoria sistemelor numai aceștia se subînțeleg ca zerouri și poli ai lui $T(s)$.
**) În $\Psi_c(s)$ ($\Psi_o(s)$) ordinea de divizibilitate este inversată.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci :

$$\partial[r_{ij}(s)]=\partial\left[\sum_{k=1}^{m}\hat{t}_{ik}(s)\,p_{kj}(s)\right]-\partial[t_i(s)]\leqslant$$

$$\leqslant \max_k \partial[\hat{t}_{ik}(s)]+\max_k \partial\,[p_{kj}(s)]\,-\partial[t_i(s)]\leqslant (<)$$

$$\partial[t_i(s)]+\partial_{cj}[P(s)]-\partial[t_i(s)]=\partial_{cj}[P(s)]$$

de unde şi inegalitatea $\max_i \partial[r_{ij}(s)]\leqslant (<)\,\partial_{cj}[P(s)]$ adică

$$\partial_{cj}[R(s)]\leqslant (<)\,\partial_{cj}[P(s)]\forall j_j.$$

Un rezultat analog se obţine pentru cazul cînd $p\times m$ matricea $T(s)$ proprie (strict proprie) este factorizată la stînga, $T(s)=\bar{P}^{-1}(s)\,\bar{R}(s)$, rezultînd $\partial_{ri}[\bar{R}(s)]\leqslant (<)\,\partial_{ri}[\bar{P}(s)]$, $i=1,\ldots,p$, inegalităţi ce se scriu condensat $\partial_r[\bar{R}(s)]\leqslant (<)\partial_r[\bar{P}(s)]$.

În general, dacă $T(s)=R(s)P^{-1}(s)$ $(=\bar{P}^{-1}(s)\bar{R}(s))$ şi $\partial_c[R(s)]\leqslant(<)$ $\partial_c[P(s)]$ $(\partial_r[\bar{R}(s)]\leqslant (<)\,\partial_r[\bar{P}(s)])$ nu rezultă în mod necesar că $T(s)$ este proprie (strict proprie).

În acest sens avem :

Propoziţia 8. Fie $p\times m$ matricea raţională $T(s)$ factorizată la dreapta $T(s)=R(s)P^{-1}(s)$ cu $P(s)$ coloană proprie. Atunci dacă $\partial_c[R(s)]\leqslant(<)$ $\partial_c[P(s)]$, $T(s)$ este proprie (strict proprie).

Demonstraţie. Fie $\Gamma_c\triangleq\Gamma_c[P(s)]$, $\gamma_c\triangleq|\Gamma_c|$. Fie $d_i\triangleq\partial_{ci}[P(s)]$, $i=1,2,\ldots,m$ şi $\bar{d}\triangleq\sum_{i=1}^{m}d_i$, $\bar{d}_i\triangleq\sum_{k\neq i}d_k$. Întrucît $P(s)$ este coloană proprie, $|P(s)|=\gamma_c s^{\bar{d}}+\ldots\ldots\ldots$ Dacă acum $P^{+}(s)\triangleq[p_{ij}^{+}(s)]$ atunci evident $\partial[p_{ij}^{+}(s)]\leqslant d_i\ \forall j$. Punînd $T(s)\triangleq[t_{ij}(s)]$ şi $R(s)=[r_{ij}(s)]$ avem

$$t_{ij}(s)=\frac{\sum_{k=1}^{m}r_{ik}(s)\,p_{kj}^{+}(s)}{\gamma_c s^{\bar{d}}+\ldots}\triangleq\frac{m_{ij}(s)}{|P(s)|}$$

Dar

$$\partial[r_{ik}(s)\,p_{kj}^{+}(s)]=\partial[r_{ik}(s)]+\partial[p_{kj}^{+}(s)]\leqslant\partial_{ck}[R(s)]+\bar{d}_k$$

$$\leqslant (<)d_k+\bar{d}_k=\bar{d}.$$

Deci

$$\partial[m_{ij}(s)\,]\leqslant(<)\bar{d}=\partial[\,|P(s)|\,]$$

ceea ce arată că $t_{ij}(s)$ este proprie (strict proprie).

Un rezultat identic se obţine pentru $T(s)=\bar{P}^{-1}(s)\,\bar{R}(s)$ cu $\bar{P}(s)$ linie proprie şi $\partial_r[\bar{R}(s)]\leqslant(<)\partial_r[\bar{P}(s)]$.

Corolarul 14. Fie $T(s)$ o matrice raţională şi $T(s)=R(s)\,P^{-1}(s)$ $(\bar{P}^{-1}(s)\bar{R}(s))$ o factorizare la dreapta (stînga). Atunci dacă $P(s)$ este coloană proprie ($\bar{P}(s)$ este linie proprie) şi $\partial_c[P(s)]=\partial_c[R(s)]$ $(\partial_r[\bar{R}(s)]=\partial_r[\bar{P}(s)])$ $T(s)$ este proprie dar nu strict proprie.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, conform propoziției 8, $T(s)$ este proprie. Dacă $T(s)$ ar fi strict proprie atunci conform propoziției 7 $\partial_c[R(s)] < \partial_c[P(s)]$ ceea ce contrazice ipoteza.

TEOREMA 11. *Fie $T(s)$ rațională și $T(s) = R(s)\,P^{-1}(s)$ o factorizare la dreapta. Atunci $T(s)$ se descompune în*

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s) = M(s) + N(s)P^{-1}(s)$$

unde $M(s)$ și $N(s)$ sînt matrici polinomiale unice (față de factorizarea lui $T(s)$) și unde $N(s)P^{-1}(s)$ este strict proprie, adică $\partial_c[N(s)] < \partial_c[P(s)]$. Dacă $R(s)$ și $P(s)$ sînt coprime drepte atunci și $N(s)$ și $P(s)$ sînt coprime drepte. $M(s)$ se mai numește și cîtul sau partea întreagă a lui $T(s)$.

Demonstrație. Evident, prin descompunerea fiecărui element al lui $T(s)$ în partea sa întreagă și strict proprie, aceasta se desface unic în $T(s) = M(s) + T_{sp}(s)$ unde $M(s)$ definesc partea întreagă iar $T_{sp}(s)$ partea strict proprie a lui $T(s)$. Odată obținut $M(s)$, fie $N(s) \triangleq R(s) - M(s)P(s)$, de unde rezultă egalitatea din enunțul teoremei. Conform unicității descompunerii lui $T(s)$, este obligator ca $T_{sp}(s) = N(s)P^{-1}(s)$, ceea ce arată că factorizarea din membrul drept este strict proprie. Dacă acum $R(s)$ și $P(s)$ sînt coprime la dreapta, dar $N(s)$ și $P(s)$ nu sînt coprime la dreapta ar rezulta din relația de definire a lui $N(s)$ că nici $R(s)$ și $P(s)$ nu sînt coprime la dreapta.

Un rezultat similar se obține și pentru factorizările la stînga ale lui $T(s)$.

COROLARUL 15. Fie $T(s)$ proprie și nesingulară. Atunci cîtul $M(s)$ al lui $T^{-1}(s)$ este o matrice nesingulară cu $M^{-1}(s)$ proprie.

Într-adevăr, fie $T(s) = P(s)R^{-1}(s)$ o factorizare la dreapta cu $R(s)$ coloană proprie și $P(s)$ evident nesingulară. Atunci $T^{-1}(s) = R(s)\,P^{-1}(s)$ nu este strict proprie. Într-adevăr, dacă ar fi, atunci $\partial_c[R(s)] < \partial_c[P(s)]$ dar din faptul că $T(s)$ este proprie avem $\partial_c[R(s)] \geqslant \partial_c[P(s)]$ ceea ce este contradictoriu. Așa dar, sigur $T^{-1}(s)$ are un cît $M(s) \neq 0$ și conform cu teorema 11

$$R(s)P^{-1}(s) = M(s) + N(s)\,P^{-1}(s)$$

cu $\partial_c[N(s)] < \partial_c[P(s)]$. Cum $\partial_c[P(s)] \leqslant \partial_c[R(s)]$ rezultă $\partial_c[N(s)] < \partial_c[R(s)]$. Se poate atunci scrie

$$M(s) = (R(s) - N(s))P^{-1}(s)$$

unde, datorită ultimei inegalități stricte și faptului că $R(s)$ este coloană proprie, rezultă că $R(s) - N(s)$ continuă să fie coloană proprie și deci nesingulară. Așadar $M(s)$ este nesingulară iar $M^{-1}(s) = P(s)\,(R(s) - N(s))^{-1}$ evident proprie.

Dacă $T(s)$ nu este proprie, corolarul 15 nu este în mod necesar adevărat.

COROLARUL 16. Fie $T(s)$ pătrată și proprie. Atunci dacă cîtul M al lui $T(s)$ (care este evident o matrice constantă) este nesingular, $T(s)$ este

Scanned with OKEN Scanner

o matrice nesingulară, iar $T^{-1}(s)$ este proprie cu cîtul M^{-1}. Într-adevăr, fie $T(s) = R(s)P^{-1}(s)$ cu $P(s)$ coloană proprie. Atunci, conform teoremei 11

$$R(s)P^{-1}(s) = M + N(s)\,P^{-1}(s)$$

și deci $R(s) = MP(s) + N(s)$. Cum $MP(s)$ este coloană proprie și $\partial_c[N(s)] < \partial_c[P(s)] = \partial_c[MP(s)]$ ($M\,\Gamma_c[P(s)]$ este nesingulară), rezultă că $R(s)$ este coloană proprie cu $\partial_c[R(s)] = \partial_c[P(s)]$ și deci nesingulară. De asemenea, din ultima egalitate și $P(s)R^{-1}(s)$ va rezulta proprie, explicitîndu-se în forma $(M^{-1}R(s) - N(s))R^{-1}(s) = M^{-1} - N(s)R^{-1}(s)$, ceea ce demonstrează complet corolarul.

DEFINIȚIA 21. Fie $T(s)$ o matrice rațională și fie

$$U(s)\,T(s)\,V(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dfrac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

($U(s)$, $V(s)$ unimodulare) forma (unică) McMillan a lui $T(s)$.
Fie

$$\nu(T(s)) \triangleq \sum_{i=1}^{r} \partial[\psi_i(s)]$$

$\nu(T(s))$ se numește ordinul minimal de realizare al lui $T(s)$.

Conform cu corolarul 13 al teoremei 10, *ordinul minimal de realizare este egal cu gradul determinantului numitorului oricărei factorizări prime la dreapta sau la stînga a lui* $T(s)$. De asemenea, din teorema 11, rezultă imediat că $\nu(T(s)) = \nu\,(T_{sp}(s))$ *unde* $T_{sp}(s)$ *este partea strict proprie a lui* $T(s)$. Din interpretarea corolarului 16 al teoremei 11 (lăsăm aceasta pe seama cititorului), rezultă că *dacă* $T(s)$ *este proprie și pătrată cu cîtul nesingular, atunci* $\nu(T(s)) = \nu(T^{-1}(s))$.

DEFINIȚIA 22. Fie $T(s)$ esențialmente proprie. Atunci

$$\delta(T(s)) \triangleq \nu(T(s))$$

se numește gradul McMillan al matricii raționale proprii $T(s)$.

Extinderea definiției 22 se face astfel. Fie $T(s)$ o matrice rațională oarecare și fie substituția $s = \alpha p/(p-1)$ unde α este oricare dar diferit de orice zero sau pol (la distanță finită) al oricărui minor de orice ordin a lui $T(s)$. Fie $\hat{T}(p) = T(\alpha\,p/(p-1))$. Se spune că $T(s)$ are un zero sau pol în $s = \infty$ după cum respectiv $\hat{T}(p)$ are în $p = 1$ un zero sau un pol.

Scanned with OKEN Scanner

În abordarea care urmează, și numai în aceasta, vom înțelege prin zerourile lui $T(s)$ zerourile și polii plasați atît la distanța finită cît și infinită. Avem atunci

DEFINIȚIA 23. Fie $\hat{T}(p) = T(\alpha p/(p-1))$. Atunci

$$\delta(T(s)) \triangleq \nu(\hat{T}(p))$$

se numește gradul McMillan al matricii rațională $T(s)$.

Se demonstrează că $\delta(T(s))$ este independent de alegerea lui α (cu restricțiile impuse acestuia). Se mai demonstrează că definițiile 22 și 23 sînt compatibile.

Gradul McMillan are următoarele proprietăți [A.3]:

1) $\delta(T(s)) = 0$ implică $T(s)$ independentă de s.

2) Dacă $T(s)$ este nesingulară, atunci $\delta(T(s)) = \delta(T^{-1}(s))$.

3) Dacă $T_1(s) + T_2(s)$ are sens, atunci $\delta(T_1(s) + T_2(s)) \leqslant \delta(T_1(s)) + \delta(T_2(s))$, egalitatea avînd loc dacă $T_1(s)$ și $T_2(s)$ nu au poli comuni.

4. Dacă $T_1(s)$ și $T_2(s)$ sînt $p \times m$ și respectiv $m \times q$ matrici, atunci $\delta(T_1(s)T_2(s)) \leqslant \delta(T_1(s)) + (T_2(s))$, egalitatea avînd loc dacă $p \geqslant m$, $m \leqslant q$ și nici un pol al lui $T_1(s)$ nu este zero al lui $T_2(s)$ iar nici un pol al lui $T_2(s)$ nu este zero al lui $T_1(s)$.

Precizăm că în teoria sistemelor vom înțelege gradul McMillan în sensul definiției 22.

Pînă acum am evidențiat *proprietățile intrinseci* ale matricilor polinomiale și raționale. În cele ce urmează vom pune în evidență unele aspecte legate de aceste matrici privite ca morfisme de module sau de spații liniare.

Așa cum s-a văzut în anexa A 1 unei $p \times m$ matrici polinomiale $P(s)$ i se asociază în mod unic un morfism de la $\mathbb{R}^m[s]$ în $\mathbb{R}^p[s]$ precizat prin $E_i(s) \mapsto P_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, unde $E_i(s)$ sînt elementele bazei standard din $\mathbb{R}^m[s]$, iar $P_i(s)$ coloanele lui $P(s)$. Avem atunci

TEOREMA 12. *Fie $P(s)$ o $p \times m$ matrice polinomială considerată ca morfism de la $\mathbb{R}^m[s]$ în $\mathbb{R}^p[s]$. Dacă $\rho[P(s)] = r$, atunci $\mathrm{Im}P(s) \subset \mathbb{R}^p[s]$ și $\mathrm{Ker}P(s) \subset \mathbb{R}^m[s]$ sînt submodule libere de rang r și respectiv $m-r$.*

Demonstrație. Fie aplicată următoarea procedură:

0. Se construiește matricea polinomială.

$$A(s) = \left[\frac{P(s)}{I_m}\right]\Big\}\, p$$

1. Se aduce $P(s)$ la forma de eșalon redus pe coloane prin operații elementare asupra coloanelor lui $A(s)$ (aceasta revine la aplicarea algoritmului AER asupra lui $A^T(s)$ și apoi la retranspunerea rezultatului). Rezultă

$$\bar{A}(s) = \left[\begin{array}{c:c} \overbrace{E(s)}^{r} & \overbrace{0}^{m-r} \\ \hline V(s) & \bar{U}(s) \end{array}\right]\begin{matrix}\Big\}\, p \\ \Big\}\, m\end{matrix}$$

Atunci coloanele lui $E(s)$ și cele ale lui $\bar{U}(s)$ sînt baze ale lui Im $P(s)$ și respectiv Ker$P(s)$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr. Fie $U(s) \triangleq [V(s)\ \bar{U}(s)]$ care este unimodulară, atunci $[E(s)\quad 0] = P(s)U(s)$. Cum $E(s)$ este de rang maximal coloană, rezultă conform propoziției 3, că numărul r de coloane ale lui $E(s)$ este egal cu $\rho[P(s)]$. Fie acum $y(s) \in \operatorname{Im} P(s)$. Există atunci $u(s) \in \mathbb{R}^m[s]$ astfel încît $y(s) = P(s)\,u(s)$. În consecință, punînd

$$U^{-1}(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \} m-r \end{matrix}$$

rezultă

$$y(s) = P(s)\,u(s) = [E(s)\quad 0]\begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} u(s) = E(s)\,u_1(s)$$

unde $u_1(s) = W_1(s)u(s) \in \mathbb{R}^r[s]$. Așadar, coloanele lui $E(s)$ sînt un sistem de generatori ai lui $\operatorname{Im}P(s)$. Cum aceste coloane sînt liniar independente peste $\mathbb{R}(s)$ ele reprezintă o bază pentru $\operatorname{Im}P(s)$.

Toate bazele lui $\operatorname{Im}P(s)$ au r elemente. Demonstrația este o consecință banală a inegalității lui Sylvester și este lăsată ca exercițiu cititorului. În consecință Im $P(s)$ *este un submodul liber al lui* $\mathbb{R}^p[s]$, *de rang* r. Fie acum $E_1(s)$ o bază oarecare a lui $\operatorname{Im}P(s)$. Atunci există $K(s)$ și $K_1(s)$ $r \times r$ — matrici polinomiale nesingulare, astfel încît $E(s) = E_1(s)K_1(s)$ și $E_1(s) = E(s)\,K(s)$, de unde $E_1(s)\,(K^{-1}(s) - K_1(s)) = 0$. Cum $E_1(s)$ este de rang maximal coloană, rezultă $K_1(s) = K^{-1}(s)$, adică $K(s)$ este unimodulară. Așadar, bazele lui $\operatorname{Im}P(s)$ *se generează prin* $E_1(s) = E(s)\,K(s)$ *unde* $K(s)$ *este orice matrice unimodulară.*

Fie acum $u(s) \in \operatorname{Ker} P(s)$. Atunci din $P(s)\,u(s) = 0$ avem $[E(s)\quad 0]\begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} u(s) = 0$, adică $E(s)W_1(s)u(s) = 0$ sau încă, deoarece $E(s)$ este de rang maximal coloană, $W_1(s)u(s) = 0$. Așadar, pentru orice $u(s) \in \operatorname{Ker} P(s)$ avem $U^{-1}(s)\,u(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(s) \end{bmatrix}$, unde $u_2(s) \triangleq W_2(s)\,u(s) \in$ $\in \mathbb{R}^{m-r}[s]$. Atunci $u(s) = [V(s)\ \bar{U}(s)]\begin{bmatrix} 0 \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \bar{U}(s)\,u_2(s)$, rezultînd că $\bar{U}(s)$ este un sistem de generatori ai lui $\operatorname{Ker}P(s)$. Cum $\bar{U}(s)$ este de rang maximal coloană rezultă că $\bar{U}(s)$ este o bază pentru Ker $P(s)$. Analog ca mai sus orice bază a lui Ker $P(s)$ are $m-r$ elemente, deci $\operatorname{Ker}P(s)$ *este un submodul liber al lui* $\mathbb{R}^m[s]$, *de rang* $m-r$. De asemenea, *orice bază* $\bar{U}_1(s)$ *a lui* Ker $P(s)$ *este de forma* $\bar{U}_1(s) = \bar{U}(s)W(s)$ *cu* $W(s)$ $(m-r) \times (m-r)$ *unimodulară.*

Fie $P(s)$ *o* $p \times m$ matrice polinomială. Interpretînd-o ca matrice rațională, se poate asocia unic acestei matrici un morfism de la $\mathbb{R}^m(s)$ în $\mathbb{R}^p(s)$ (vezi anexa A 1), prezentat prin $E_i(s) \mapsto P_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$, unde $E_i(s)$ sînt elementele bazei standard din $\mathbb{R}^m(s)$, iar $P_i(s)$ coloanele lui $P(s)$, interpretate ca matrici raționale. Avem atunci din teorema 12

COROLARUL 17. Procedura din teorema 12 furnizează două baze polinomiale pentru $\operatorname{Im}P(s) \subset \mathbb{R}^p(s)$ și respectiv Ker $P(s) \subset \mathbb{R}^m(s)$. Dacă $\rho[P(s)] = r$, atunci dim $\operatorname{Im}P(s) = r$, iar $\dim\operatorname{Ker}P(s) = m-r$. *Demonstrația* este lăsată ca exercițiu (banal) pentru cititor.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $T(s)$ o $p \times m$ matrice rațională. Atunci (vezi anexa A1) acestei matrici i se asociază unic un morfism de la $\mathbb{R}^m(s)$ în $\mathbb{R}^p(s)$, precizat prin $E_i(s) \mapsto T_i(s)$, $i = 1,2,\ldots, m$. unde $E_i(s)$ sînt elementele bazei standard iar $T_i(s)$ coloanele (raționale) ale lui $T(s)$. Factorizînd $T(s)$ la dreapta și respectiv la stînga, adică $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s) = P_o^{-1}(s)\,Q(s)$ rezultă imediat că $\mathrm{Im}\,T(s) = \mathrm{Im}\,R(s)$, iar $\mathrm{Ker}\,T(s) = \mathrm{Ker}\,Q(s)$, ceea ce permite, *aplicînd procedura din teorema 12*, susținută de corolarul 17, *să se calculeze 2 baze (polinomiale) pentru* $\mathrm{Im}\,T(s)$ *și respectiv* $\mathrm{Ker}\,T(s)$.

Observația 9. Teorema 12 și corolarul 17 permit ca orice submodul liber al unui $\mathbb{R}^n[s]$ și respectiv orice subspațiu al unui $\mathbb{R}^n(s)$, să fie interpretate ca imagine sau nucleu al unei matrici polinomiale, respectiv raționale, adecvat aleasă.

DEFINIȚIA 24. Fie un submodul liber de rang r din $\mathbb{R}^n[s]$ avînd ca bază coloanele $n \times r$ matricii $\Pi(s)$ (de rang maximal coloană). Dacă $\Pi(s)$ este coloană proprie, se spune că coloanele acesteia formează o *baza redusă* pentru submodulul considerat. Dacă în plus coloanele lui $\Pi(s)$ sînt ordonate (de la stînga la dreapta) după puterile crescătoare ale gradelor acestora, se spune că coloanele lui $\Pi(s)$ formează o *bază redusă și ordonată* a submodulului considerat. În mod identic se definesc pentru o bază polinomială (și numai pentru o bază polinomială) a unui subspațiu din $\mathbb{R}^n(s)$ noțiunile de „redus„ și „redus și ordonat".

TEOREMA 13. *Fie* $\Pi_1(s)$ *și* $\Pi_2(s)$ *două baze reduse și ordonate ale aceluiași submodul liber de rang* r *din* $\mathbb{R}^n[s]$.

Atunci :

(i) $\partial_{ci}[\Pi_1(s)] = \partial_{ci}[\Pi_2(s)]$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

(ii) *Fie* d *un întreg* $\geqslant d_1 = \partial_{c1}[\Pi_1(s)]$. *Atunci coloanele din* $\Pi_1(s)$ *și respectiv cele din* $\Pi_2(s)$, *de grad* $\leqslant d$, *generează același submodul liber în* $\mathbb{R}^n[s]$.

(iii) $\Gamma_c[\Pi_1(s)] = \Gamma_c[\Pi_2(s)]\,W$, *unde* W *este o matrice (constantă) nesingulară.*

Demonstrație. Conform teoremei 12, $\Pi_1(s)$ și $\Pi_2(s)$ sînt unimodular echivalente la dreapta. Atunci punctul (i) reprezintă rezultatul teoremei 9. Punctul (ii) rezultă imediat din corolarul 11, cazul 2. În fine, punctul (iii) este o consecință directă a aceluiași punct al lemei 1 și a faptului că $\Gamma_c[\Pi_1(s)]$ și $\Gamma_c[\Pi_2(s)]$ sînt de rang maximal coloană.

COROLARUL 18. Toate bazele aceluiași submodul liber din $\mathbb{R}^n[s]$ au aceiași indici Kronecker coloană.

DEFINIȚIA 25. Fie un subspațiu din $\mathbb{R}^n(s)$ avînd ca bază polinomială coloanele matricii $\Pi(s)$. Dacă $\Pi(s)$ este primă la dreapta, se spune că coloanele acestei matrici formează o *bază minimală* pentru subspațiul considerat

Observația 10. Matricea $\overline{U}(s)$ furnizată în teorema 12 este o bază minimală pentru $\mathrm{Ker}\,P(s) \subset \mathbb{R}^m(s)$ (vezi corolarul 8).

TEOREMA 14. *Fie* $\Pi_1(s)$ *și* $\Pi_2(s)$ *două matrici ale cărei coloane reprezintă respectiv două baze minimale ale aceluiași subspațiu de dimensiune* r *din* $\mathbb{R}^n(s)$. *Atunci* $\Pi_1(s)$ *și* $\Pi_2(s)$ *sînt unimodular echivalente la dreapta.*

Demonstrație. Evident, $\Pi_1(s) = \Pi_2(s)T_g(s)$, unde $T_g(s)$ este o matrice rațională nesingulară. Fie $T_g(s) = P_g^{-1}(s)\,R_g(s)$. Atunci $\Pi_1(s)\,R_g^{-1}(s) = \Pi_2(s)P_g^{-1}(s)$ cele două factorizări fiind prime la dreapta. Atunci, conform

Scanned with OKEN Scanner

teoremei 10, pct 1, numărătorii celor două factorizări sînt unimodular echivalenţi la dreapta.

COROLARUL 19. Fie $P(s)$ o bază polinomială oarecare a unui subspaţiu din $\mathbb{R}^n(s)$. Atunci $P(s) = \Pi(s)K(s)$, unde $\Pi(s)$ este o bază minimală oarecare a subspaţiului, iar $K(s)$ o matrice polinomială nesingulară adecvat aleasă.

Demonstraţie. Fie $P(s) = P_1(s)D(s)$, unde $D(s)$ este un c. m. m. d. c. la dreapta al lui $P(s)$, $P_1(s)$ fiind o bază minimală. Atunci $K(s) = U(s)\,D(s)$, unde $P_1(s) = \Pi(s)\,U(s)$ cu $U(s)$ unimodulară.

Observaţia 11. Teorema 13 este adevărată într-un subspaţiu oarecare al lui $\mathbb{R}^n(s)$ dacă a) coloanele lui $\Pi_1(s)$ şi respectiv $\Pi_2(s)$ sînt două baze minimale (vezi teorema 14), reduse şi ordonate ale subspaţiului considerat, sau, b) coloanele lui $\Pi_1(s)$ şi respectiv $\Pi_2(s)$ sînt două baze reduse şi ordonate ale subspaţiului considerat, iar $\Pi_1(s)$ şi $\Pi_2(s)$ sînt unimodular echivalente la dreapta.

COROLARUL 20. Fie $P(s)$ o bază redusă şi ordonată a unui subspaţiu de dimensiune r din $\mathbb{R}^n(s)$ şi fie $\Pi(s)$ o bază minimală, redusă şi ordonată a aceluiaşi subspaţiu.

Atunci :

$$\partial_{ci}[\Pi(s)] \leqslant \partial_{ci}[P(s)],\ i = 1,2,\ldots,r.$$

Demonstraţia este consecinţa imediată a corolarului 19 şi a lemei 2.

Punem acum în evidenţă cîteva proprietăţi remarcabile ale bazelor polinomiale de nuclee dintr-un $\mathbb{R}^n(s)$.

PROPOZIŢIA 9. Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice raţională, $n \triangleq p+m$ şi fie $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s) = P_o^{-1}(s)\,Q(s)$ două factorizări la dreapta şi respectiv la stînga. Introducem :

$$\Pi_c(s) \triangleq \begin{bmatrix} R(s) \\ P_c(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\,p \\ \}\,m \end{matrix}$$

şi

$$\Pi_o(s) \triangleq [\underbrace{P_o(s)}_{p} \vdots - \underbrace{Q(s)}_{m}]$$

Atunci coloanele lui $\Pi_c(s)$ formează o bază pentru $\operatorname{Ker} \Pi_o(s)$ ($\subset \mathbb{R}^n(s)$) iar coloanele lui $\Pi_o^T(s)$, o bază pentru $\operatorname{Ker} \Pi_c^T(s)$ ($\subset \mathbb{R}^n(s)$).

Demonstraţia este o consecinţă a egalităţii evidente $\Pi_o(s)\Pi(s) = 0$ şi a faptului că $\rho[\Pi_c(s)] = m$, iar $\rho[\Pi_o(s)] = p$ cu $p+m = n$.

COROLARUL 21. Dacă factorizările lui $T(s)$ din enunţul propoziţiei 9 sînt prime (la dreapta şi respectiv la stînga), atunci coloanele lui $\Pi_c(s)$ şi respectiv cele ale lui $\Pi_o^T(s)$ formează două baze minimale pentru $\operatorname{Ker}\Pi_o(s)$ şi respectiv pentru $\operatorname{Ker}\Pi_c^T(s)$.

Într-adevăr, este clar că avem $\operatorname{rang} \Pi_c(s) = m$ şi $\operatorname{rang} \Pi_o(s) = p$ pentru orice $s \in \mathbb{C}$ (vezi teorema 5 şi corolarul 7) şi în consecinţă (vezi teorema 6) $\Pi_c(s)$ şi $\Pi_o^T(s)$ sînt prime la dreapta.

COROLARUL 22. Dacă în enunţul propoziţiei 9, $T(s)$ este proprie, iar în factorizările corespunzătoare ale lui $T(s)$, $P_c(s)$ şi $P_o(s)$ sînt coloană şi

respectiv linie proprie, atunci coloanele lui $\Pi_c(s)$ și respectiv cele ale lui $\Pi_o^T(s)$ formează două baze reduse pentru $\mathrm{Ker}\Pi_o(s)$ și respectiv $\mathrm{Ker}\,\Pi_o^T(s)$.

Într-adevăr, deoarece $T(s)$ este proprie avem (vezi propoziția 7) $\partial_c[P_c(s)] \geqslant \partial_c[R_c(s)]$ și $\partial_r[P_o(s)] \geqslant \partial_r[Q(s)]$ și în consecință avem sigur $\Gamma_c[\Pi_c(s)]$ și $\Gamma_r[\Pi_o(s)]$ de forma

$$\Gamma_c[\Pi_c(s)] = \begin{bmatrix} ? \\ \hline \Gamma_c[P_c(s)] \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_r[\Pi_o(s)] = [\Gamma_r[P_o(s)] \,\vdots\, ?]$$

Ținînd cont de faptul că $\Gamma_c[P_c(s)]$ și $\Gamma_r[P_o(s)]$ sînt nesingulare rezultă că $\Gamma_c[\Pi_c(s)]$ și $\Gamma_r[\Pi_o(s)]$ sînt de rang maximal coloană și respectiv linie și deci $\Pi_c(s)$ și $\Pi_o^T(s)$ sînt matrici coloană proprie.

Din corolarele 21 și 22 avem imediat

Corolarul 23. Dacă $T(s)$ este proprie, iar factorizările corespunzătoare din enunțul propoziției 9 sînt coprime (la dreapta și respectiv la stînga) cu $P_c(s)$ și $P_o(s)$ coloană și respectiv linie proprie atunci coloanele lui $\Pi_c(s)$ și $\Pi_o^T(s)$ formează două baze minimale și reduse pentru $\mathrm{Ker}\Pi_o(s)$ și respectiv $\mathrm{Ker}\Pi_c^T(s)$.

Propoziția 10. Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice rațională proprie și $T(s) = P_o^{-1}(s)\,Q(s)$ o factorizare la stînga a sa unde notăm $\Pi_o(s) \triangleq [P_o(s) \mid -Q(s)]$, $n \triangleq p + m$. Fie $\Pi(s)$ o $n \times q$ matrice polinomială, $q \leqslant m$, unde

$$\Pi(s) = \begin{bmatrix} N(s) \\ \hline \underbrace{M(s)}_{q} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \} m \end{matrix}$$

ale cărei coloane formează o bază redusă pentru un subspațiu oarecare a lui $\mathrm{Ker}\,\Pi_o(s)$, Atunci $M(s)$ este coloană proprie, iar

$$\partial_c[M(s)] \geqslant \partial_c[N(s)].$$

Demonstrație. Fie $T(s) = R(s)P_c^{-1}(s)$ o factorizare primă la dreapta cu $P_c(s)$ coloană proprie. Atunci conform corolarului 23, coloanele matricii

$$\Pi_o(s) = \begin{bmatrix} R(s) \\ \hline P_c(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \} m \end{matrix}$$

formează o bază minimală și redusă pentru $\mathrm{Ker}\,\Pi_o(s)$. În consecință (vezi corolarul 19) există o $m \times q$ matrice polinomială $K(s)$ de rang maximal coloană, astfel încît

$$\Pi(s) = \Pi_c(s)K(s).$$

Cum atît $\Pi(s)$ și $\Pi_c(s)$ sînt coloană proprie, rezultă din punctul (iii) al lemei 1 că

$$\Gamma_c[\Pi(s)] = \Gamma_c[\Pi_c(s)]K$$

Scanned with OKEN Scanner

unde K este o $m \times q$ matrice constantă de rang maximal coloană. Întrucît $T(s)$ este proprie avem $\partial_c[P_c(s)] \geqslant \partial_c[R(s)]$ și în consecință ultimele m linii din $\Gamma_c[\Pi_c(s)]$ formează matricea nesingulară $\Gamma_c[P_c(s)]$. Atunci din egalitatea de mai sus, rezultă imediat că matricea Γ_{cm}, formată din ultimele m linii ale lui $\Gamma_c[\Pi(s)]$, este o matrice de rang maximal coloană, ceea ce impune obligator ca $\partial_c[M(s)] \geqslant \partial_c[N(s)]$ și $\Gamma_{cm} = \Gamma_c[M(s)]$.

A.3. ELEMENTE DE TEORIA SUBSPAȚIILOR INVARIANTE ȘI A REPREZENTĂRILOR CANONICE

Fie $\mathbb{R}[s]$ inelul (principal) al polinoamelor cu coeficienți reali și A o $n \times n$ matrice care definește aplicația liniară $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prin $e_i \mapsto a_i$, $i = 1, \ldots, n$ unde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ este baza standard din $\mathbb{R}^n$, iar a_i sînt coloanele matricii A.

Dacă $\mathbb{R}[s] \ni p(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_q s^q$ este un polinom arbitrar, atunci

$$p(A) \triangleq \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_q A^q$$

se numește polinom matriceal.

Fie

$$\mathbb{R}[A] = \{p(A) \mid p(s) \in \mathbb{R}[s]\}.$$

Se constată imediat că $\mathbb{R}[A]$ se poate organiza ca *inel comutativ unitar*, elementul unitate fiind matricea unitate I. Într-adevăr, introducînd operațiile $p(A) + q(A)$ și $p(A)\,q(A)$*) prin operațiile corespunzătoare cu matrice, rezultă imediat structura de inel comutativ unitar. Mai mult, dacă $r(A) = p(A) + q(A)$ și $g(A) = p(A)\,q(A) = q(A)\,p(A)$, atunci $r(s) = p(s) + q(s)$ și $g(s) = p(s)\,q(s)$, rezultînd un izomorfism de inele între $\mathbb{R}[s]$ și $\mathbb{R}[A]$. Cu alte cuvinte, $R[A]$ „copiază" structura de inel principal a lui $\mathbb{R}[s]$. Evident $\mathbb{R}.I$**) $\subset \mathbb{R}[A]$.

Fie acum $p(A) \in \mathbb{R}[A]$ și $x \in \mathbb{R}^n$. Evident, operația $p(A)\,x$ este bine definită prin înmulțirea matriceală corespunzătoare. Rezultă de aici că $\mathbb{R}^n$ se poate organiza ca $\mathbb{R}[A]$-modul, adică, *ca modul peste inelul principal* $\mathbb{R}[A]$, *notîndu-se* $\mathbb{R}^n_A$***).

Propoziția 1. Modulul $\mathbb{R}^n_A$ este finit generat.

Demonstrație. Într-adevăr, fie $e_1, \ldots, e_n$ baza standard fin $\mathbb{R}^n$, atunci:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 + \ldots + \mathbb{R}e_n = \mathbb{R}I\,e_1 + \ldots + \mathbb{R}\,I\,e_n \subset$$
$$\subset \mathbb{R}[A]e_1 + \ldots + \mathbb{R}[A]\,e_n \subset \mathbb{R}^n_A$$

Dar $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_A$ ca mulțimi, așadar

$$\mathbb{R}^A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{R}[A]e_i.$$

---

*) Evident, $p(A)\,q(A) = q(A)\,p(A)$.

**) $\mathbb{R}\,I = \{\lambda\,I \mid \lambda \in R\}$ unde I este matricea unitate.

***) În fond $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^n_A$ coincid ca mulțimi, un vector x considerîndu-se în $\mathbb{R}^n$ sau în $\mathbb{R}^n_A$, în funcție de împrejurări.

Scanned with OKEN Scanner

PROPOZIȚIA 2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n_A$ există $p(A) \in \mathbb{R}[A]$, cu $p(A) \neq 0$, astfel încît

$$p(A)x = 0.$$

Demonstrație. Fie șirul $x, Ax, A^2x, \ldots, A^nx$ din $\mathbb{R}^n_A$. Cum $\mathbb{R}^n$ este de dimensiune n, cei $n+1$ vectori de mai sus nu pot fi liniar independenți, deci sigur există $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nu toți nuli, astfel încît $\alpha_0 x + \alpha_1 Ax + \ldots + \alpha_n A^n x = 0$. Punînd $p(A) = \alpha_0 I + \ldots + \alpha_n A^n \neq 0$, rezultă valabilitatea propoziției.

Polinomul $p(s) \in \mathbb{R}[s]$, unde $p(A)$ este polinomul matricial de mai sus, se numește un (polinom) *anulator* relativ la A a lui x. Evident, $0 \in \mathbb{R}[s]$ este anulatorul nul.

Cu alte cuvinte, conform propoziției 2, *orice* $x \in \mathbb{R}^n_A$ *are un anulator nenul*. Această proprietate a modulului $\mathbb{R}^n_A$ se numește *torsiune* sau altfel spus $\mathbb{R}^n_A$ este un *modul* (complet) *torsionat*.

Fie $x \in \mathbb{R}^n_A$, pentru care definim

$$Annx = \{p(s) \in R[s] \mid p(A)\, x = 0\}.$$

Conform celor de mai sus $Ann\ x \neq 0$ și se arată imediat că este un ideal al lui $\mathbb{R}[s]$. Cum $\mathbb{R}[s]$ este inel principal înseamnă că există polinomul nenul *monic* (deci unic) $\mu_x(s) \in Annx$, astfel încît

$$Annx = \mathbb{R}[s]\, \mu_x(s).$$

Polinomul $\mu_x(s)$ se numește *polinomul minimal al lui* x (relativ la A). Se vede deci că polinomul minimal al lui x *este cel mai mic anulator* nenul al lui x. Altfel exprimat, dacă $p(A)x = 0$ ($p(A) \neq 0$), atunci $\mu_x(s) \mid p(s)$.

Fie acum $e_1, \ldots, e_n$ baza standard (sau o bază oarecare a lui $\mathbb{R}^n$) și fie $\mu_{e_i}(s)$ polinoamele minimale corespunzătoare vectorilor e_i. Fie

$$\mu(s) = \text{c.m.m.m.c. } \{\mu_{e_1}(s), \ldots, \mu_{e_n}(s)\}.$$

Atunci, evident, întrucît orice $x \in \mathbb{R}^n$ se scrie $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ rezultă că $\mu(A)x = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n_A$. Polinomul $\mu(s)$ se numește un (polinom) anulator al lui $\mathbb{R}^A_n$ sau al lui $\mathbb{R}^n$ relativ la A.

Analog ca mai sus, fie

$$Ann\ \mathbb{R}^n_A = \{p(s) \in R[s] \mid p(A)\, x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n_A\}$$

care este un ideal principal nenul în $\mathbb{R}[s]$. Există atunci $\bar{\mu}(s) \in Ann\ \mathbb{R}^n_A$, nenul și monic (deci unic) astfel încît

$$Ann\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[s]\ \bar{\mu}(s).$$

Fie $\mu(s)$ construit mai sus. Atunci evident $\mu(s) \in Ann\ \mathbb{R}^n_A$ deci $\bar{\mu}(s) \mid \mu(s)$. Pe de altă parte, întrucît în particular $\bar{\mu}(A)\, e_i = 0$ rezultă că $\mu_{e_i}(s) \mid \bar{\mu}(s)$, $i = 1, \ldots, n$, deci și $\mu(s) \mid \bar{\mu}(s)$, fiind c.m.m.m.c. al polinoamelor $\mu_{e_i}(s)$. Întrucît $\mu(s)$ și $\bar{\mu}(s)$ sînt monice, asocierea lor în divizibilitate conduce la $\mu(s) = \bar{\mu}(s)$. Polinomul $\mu(s)$ se numește polinomul minimal al lui $\mathbb{R}^n_A$ sau $\mathbb{R}^n$ relativ la A și este cel mai mic anulator al lui $\mathbb{R}^n_A$ sau $\mathbb{R}^n$ în

Scanned with OKEN Scanner

sensul că dacă $p(A)x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n_A (p(s) \neq 0)$ atunci $\mu(s) \mid p(s)$. Totodată, din faptul că $\mu(A)x = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$, rezultă că (matricea) $\mu(A) = 0$. Această egalitate justifică pentru $\mu(s)$ și denumirea de polinom minimal al matricii A (notat uneori $\mu_A(s)$).

PROPOZIȚIA 3. Orice subspațiu $V \subset \mathbb{R}^n$ este A-invariant dacă și numai dacă $V \subset \mathbb{R}^n_A$ este submodul.

Demonstrația este o consecință banală a faptului că $AV \subset V$ dacă și numai dacă $p(A)\ V \subset V$, $\forall\ p(A) \in \mathbb{R}[A]$.

Acest rezultat este esențial în „algebrizarea" proprietăților structurale ale matricii A.

Introducem acum un tip de subspațiu A-invariant, esențial pentru construcțiile care urmează. Fie în acest sens $e \in \mathbb{R}^n_A$ și fie

$$X_e \triangleq \mathbb{R}[A]\, e$$

care, evident, este un submodul al lui $\mathbb{R}^n_A$ generat de e adică ciclic. Conform propoziției 3, X_e în $\mathbb{R}^n$ este A-invariant și va fi numit *subspațiu invariant ciclic* al lui A.

Fie $\mu_e(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{q-1} s^{q-1} + s^q$ polinomul minimal al lui e. Atunci avem,

PROPOZIȚIA 4. $e, Ae, \ldots, A^{q-1}e$ este o bază a lui $X_e = \mathbb{R}[A]e$.

Demonstrație. Vectorii de mai sus sînt liniar independenți, căci în caz contrar ar exista $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1}$ nu toți nuli, astfel încît $\beta_0 e + \beta_1 Ae + \ldots + \beta_{q-1}A^{q-1}e = (\beta_0 I + \beta_1 A + \ldots + \beta_{q-1}A^{q-1})\, e = 0$ ceea ce înseamnă că polinomul $\beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_{q-1}s^{q-1}$, de grad strict mai mic decît $\mu_e(s)$, este un anulator al lui e, ceea ce este absurd.

Fie acum $x \in X_e$, atunci x este de forma $x = p(A)e$. Dacă $\partial[p(s)] < q$ atunci evident x este o combinație liniară de e, $Ae \ldots, A^{q-1}e$. Dacă $\partial[p(s)] \geqslant q$, atunci se poate scrie $p(s) = q(s)\mu_e(s) + r(s)$ cu $\partial[r(s)] < \partial[\mu_e(s)] = q$. Rezultă $x = (q(A)e\mu_e(A) + r(A))e = r(A)e$, $(\mu_e(A)e = 0)$, deci se obține o reducere la cazul studiat. Înseamnă atunci că $e, Ae, \ldots A^{q-1}e$ este și un sistem de generatori peste $\mathbb{R}$ pentru $X_e \subset \mathbb{R}^n$. Cu aceasta propoziția este demonstrată.

În concluzie, $\dim_{\mathbb{R}} X_e = \partial[\mu_e(s)]$, iar $\mu_e(s)$ este *polinomul minimal al subspațiului ciclic* X_e.

Fie acum $\mathbb{R}[s]$ modulul liber de rang finit $\mathbb{R}^n[s]$. Definim φ_A: $\mathbb{R}^n[s] \to \mathbb{R}^n_A$ prin

$$\mathbb{R}^n[s] \ni P(s) = \begin{bmatrix} p_1(s) \\ \vdots \\ p_n(s) \end{bmatrix} \mapsto p_1(A)e_1 + \ldots + p_n(A)\, e_n$$

unde $e_1, \ldots, e_n$ este baza standard a lui $\mathbb{R}^n$.

Rezultă imediat că φ_A este surjectivă, avînd proprietatea

$$\varphi_A(p(s)P(s) + q(s)\, Q(s)) = p(A)\, \varphi_A(P(s)) + q(A)\varphi_A(Q(s))$$

pentru orice $p(s), q(s) \in \mathbb{R}[s]$ și $P(s), Q(s) \in \mathbb{R}^n[s]$.

În fond, φ_A este un *morfism surjectiv de module*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $n \times n$ matricea polinomială $sI-A$, privită ca *endomorfism al lui* $\mathbb{R}^n[s]$. De remarcat că, întrucît $sI-A$ este coloană proprie, deci nesingulară, ea nu este însă un izomorfism al lui $\mathbb{R}^n[s]$, întrucît $(sI-A)^{-1}$ este raţională şi nu polinomială. Avem

PROPOZIŢIA 5. $\mathrm{Im}(sI-A) = \mathrm{Ker}\ \varphi_A$.

Demonstraţie. Arătăm că $\mathrm{Im}\,(sI-A) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$. Fie $Q(s) \in \mathrm{Im}(sI-A)$ ($Q(s)$ — $n \times 1$ matrice). Atunci $Q(s) = (sI-A)\ P(s)$, unde $P(s) = \mathrm{col}\ (p_1(s), \ldots, p_n(s))$.

Atunci

$$\varphi_A((sI-A)P(s)) = \varphi_A(sP(s)) - \varphi_A(AP(s))$$

Dar

$$\varphi_A(sP(s)) = \sum_{i=1}^{n} A\, p_i(A)\, e_i.$$

Dacă $A = [a_{ij}]$ atunci

$$AP(s) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, p_j(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, p_j(s) \end{bmatrix} \overset{\varphi_A}{\longmapsto} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_j(A) \right) e_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j(A) \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i = \sum_{j=1}^{n} p_j(A)\, Ae_j.$$

Deci $\varphi_A(sP(s)) = \varphi_A(AP(s))$, de unde $\varphi_A(Q(s)) = 0$.

Arătăm că $\mathrm{Ker}\ \varphi_A \subset \mathrm{Im}\ (sI-A)$. Fie

$$\mathrm{Ker}\ \varphi \ni P(s) = \begin{bmatrix} p_1(s) \\ \vdots \\ p_n(s) \end{bmatrix} = p_1(s)\, E_1(s) + \ldots + p_n(s)\, E_n(s) \qquad (1)$$

unde $E_1(s), \ldots, E_n(s)$ este baza standard a lui $\mathbb{R}^n[s]$.

Fie, de asemenea,

$$\mathrm{Im}(sI-A) \ni F_j(s) \overset{!\Delta}{=} (sI-A)\, E_j(s) = sE_j(s) - AE_j(s) =$$

$$= sE_j(s) - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i(s),\ j = 1, \ldots, n.$$

Aşadar

$$sE_j(s) = F_j(s) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, E_i(s),\ j = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Înlocuind în (1), pe (2) atît cît este necesar, rezultă $P(s)$ de forma

$$P(s) = \sum_{j=1}^{n} q_j(s)\, F_j(s) + \sum_{j=1}^{n} b_j E_j(s). \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, întrucît $P(s) \in \operatorname{Ker}\varphi_A$, $\varphi_A(P(s)) = 0$, iar $\varphi_A(F_j(s)) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, întrucît $F_j(s) \in \operatorname{Im}(sI-A) \subset \operatorname{Ker}\varphi_A$, rezultă

$$0 = \varphi_A\left(\sum_{j=1}^{n} b_j E_j(s)\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$$

adică $b_j = 0, j = 1, \ldots, n$ și deci (3) devine

$$P(s) = \sum_{j=1}^{n} q_j(s)\, F_j(s) = (sI-A)\begin{bmatrix} q_1(s) \\ \vdots \\ q_n(s) \end{bmatrix}$$

adică $P(s) \in \operatorname{Im}(sI-A)$ și deci $\operatorname{Ker}\varphi_A \subset \operatorname{Im}(sI-A)$, propoziția 4 fiind complet demonstrată.

Construim acum o *bază pentru submodulul* $\operatorname{Ker}\varphi_A$, *adică*, conform propoziției 4, *pentru submodulul* $\operatorname{Im}(sI-A)$.

Pentru aceasta, fie $\Lambda(s)$ forma diagonal canonică a lui $sI-A$, adică

$$sI-A = U(s)\,\Lambda(s)\,V(s)$$

unde $U(s)$ și $V(s)$ sînt unimodulare. Se vede imediat că

$$\operatorname{Im}(sI-A) = \operatorname{Im}(U(s)\Lambda(s)). \tag{4}$$

Întrucît $(sI-A)$ este nesingulară, $\Lambda(s)$ este nesingulară, fiind de forma

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \delta_1(s) & & & & & \\ & \delta_2(s) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \delta_r(s) & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

unde $\partial[\delta_i(s)] \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, r$ și $\delta_1(s) \mid \delta_2(s) \mid \ldots \mid \delta_r(s)$.

Fie

$$U(s) = [U_1(s) \vdots U_2(s) \vdots \ldots U_r(s) \vdots U_{r+1}(s) \vdots \ldots \vdots U_n(s)]$$

ale cărei coloane formează evident o bază pentru $\mathbb{R}^n[s]$, iar coloanele lui

$$W(s) \triangleq U(s)\Lambda(s) = [\delta_1(s)U_1(s) \vdots \ldots \delta_r(s)U_r(s) \vdots U_{r+1}(s) \vdots \ldots \vdots U_n(s)]$$

formează o bază (întrucît sînt liniar independente peste $\mathbb{R}[s]$) pentru $\operatorname{Im}(sI-A)$ deci pentru $\operatorname{Ker}\varphi_A$.

De remarcat că $\operatorname{Im}(sI-A) \subsetneq \mathbb{R}^n[s]$, cu toate acestea, atît $\operatorname{Im}(sI-A)$ cît și $\mathbb{R}^n[s]$ au același număr de elemente pentru bazele lor. Acest lucru poate avea loc în module în timp ce în spații liniare aceasta nu se întîmplă.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă imediat de aici că

$$\varphi_A(U_{r+1}(s)) = \ldots = \varphi_A(U_n(s)) = 0.$$

Fie acum în $\mathbb{R}^n_A$ sau $\mathbb{R}^n$

$$\bar{e}_i = \varphi_A(U_i(s)),\ i = 1,2,\ldots,r$$

unde sigur $\bar{e}_i \neq 0$, căci altfel $U_i(s) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$, de unde rezultă că $U_i(s)$ se exprimă (unic) în forma

$$U_i(s) = p_1(s)\delta_1(s)U_1(s) + \ldots + p_i(s)\delta_i(s)U_i(s) + \ldots$$

$$\ldots + p_r(s)U_r(s) + \ldots + p_n(s)U_n(s),\ p_j(s) \in \mathbb{R}[s],\ j = 1,\ldots,n$$

adică $1 = p_i(s)\ \delta_i(s)$ ceea ce este absurd deoarece $\partial[\delta_i(s)] \geqslant 1$, $i = 1,\ldots,r$.

Rezultă acum imediat că $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ sînt un sistem de generatori ai lui $\mathbb{R}^n_A$ adică

$$\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]\bar{e}_1 + \mathbb{R}[A]\bar{e}_2 + \ldots + \mathbb{R}[A]\bar{e}_r \tag{5}$$

Într-adevăr, fie $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_A$. Atunci considerînd $X(s) \in \mathbb{R}^n[s]$ de forma $X(s) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ se vede că $\varphi_A(X(s)) = x$. Dar

$$X(s) = U(s)\,U^{-1}(s)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Punem,

$$\begin{bmatrix} p_1(s) \\ \vdots \\ p_n(s) \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} U^{-1}(s)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Atunci

$$X(s) = p_1(s)\,U_1(s) + \ldots + p_n(s)\,U_n(s)$$

și

$$x = \varphi_A(X(s)) = p_1(A)\,\varphi_A(U_1(s)) + \ldots + p_r(A)\,\varphi_A(U_r(s)) =$$

$$= p_1(A)\bar{e}_1 + \ldots + p_r(A)\bar{e}_r$$

unde, evident, $\varphi_A(U_{r+1}(s)) = \ldots = \varphi_A(U_n(s)) = 0$. Așadar (5) este demonstrată.

Să arătăm că (5) este o sumă directă, adică

$$\mathbb{R}^n_A(=\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[A]\bar{e}_1 \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_r. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, fie

$$p_1(A)\bar{e}_1 + \ldots + p_r(A)\bar{e}_r = 0 \tag{7}$$

de unde imediat rezultă că

$$p_1(s)U_1(s) + \ldots + p_r(s)U_r(s) \in \operatorname{Ker} \varphi_A.$$

Deci, avem exprimarea (unică)

$$p_1(s)U_1(s) + \ldots + p_r(s)U_r(s) =$$
$$= q_1(s)\delta_1(s)U_1(s) + \ldots + q_r(s)\delta_r(s)U_r(s) +$$
$$+ q_{r+1}(s)U_{r+1}(s) + \ldots + q_n(s)U_n(s)$$

de unde

$$p_i(s) = q_i(s)\delta_i(s) \quad i = 1, \ldots, r$$
$$0 = q_{r+1}(s) = \ldots = q_n(s).$$

Deci

$$p_i(s)U_i(s) = q_i(s)\delta_i(s)U_i(s), \quad i = 1, \ldots, r$$

de unde

$$p_i(A)\bar{e}_i = \varphi_A(p_i(s)U_i(s)) = q_i(s)\varphi_A(\delta_i(s)U_i(s)) = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, r$, deoarece $\delta_i(s)U_i(s) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$.

Aşadar (7), implică $p_i(A)\bar{e}_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$, ceea ce demonstrează (6).

În fine, să arătăm că

$$\mu_{\bar{e}_i}(s) = \delta_i(s), \quad i = 1,2, \ldots, r \tag{8}$$

Într-adevăr, întrucît $\delta_i(s)U_i(s) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$, avem

$$0 = \varphi_A(\delta_i(s)U_i(s)) = \delta_i(A)\bar{e}_i, \; i = 1, 2, \ldots, r$$

deci $\mu_{\bar{e}_i}(s) \mid \delta_i(s)$. Pe de altă parte $\mu_{\bar{e}_i}(A)\bar{e}_i = 0$, adică

$$\varphi_A(\mu_{\bar{e}_i}(s)U_i(s)) = 0, \quad i = 1,2, \ldots, r$$

de unde $\mu_{\bar{e}_i}(s)U_i(s) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$. Atunci $\mu_{\bar{e}_i}(s)U_i(s)$ se reprezintă (unic) în forma

$$\mu_{\bar{e}_i}(s)U_i(s) = q_1(s)\delta_1(s)U_1(s) + \ldots + q_i(s)\delta_i(s)U_i(s) + \ldots$$
$$\ldots + q_r(s)\delta_r(s)U_r(s) + \ldots + q_n(s)U_n(s)$$

cu $q_i(s) \in \mathbb{R}[s]$, de unde $\mu_{\bar{e}_i}(s) = q_i(s)\,\delta_i(s)$, adică $\delta_i(s) \mid \mu_{\bar{e}_i}(s)$.

Rezultă că $\delta_i(s)$ şi $\mu_{\bar{e}_i}(s)$ sînt asociaţi în divizibilitate şi cum sînt monice avem $\delta_i(s) = \mu_{\bar{e}_i}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Obţinem, pe baza celor de mai sus, următorul rezultat fundamental exprimat de

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 1 *(teorema factorilor invarianți). Fie* $\mathbb{R}^n$ *și transformarea liniară* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *reprezentată prin matricea* A. *Atunci* $\mathbb{R}^n$ *se descompune într-o sumă directă (finită) de subspații* A*-invariante ciclice sau altfel spus modulul* $\mathbb{R}^n_A$ *se descompune într-o sumă directă de submodule ciclice. Mai exact, există* $r \leqslant n$, $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r \in \mathbb{R}^n$, *astfel încît*

$$\mathbb{R}^n_A\ (=\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[A]\bar{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_r$$

unde $\mu_{\bar{e}_1}(s) \mid \ldots \mid \mu_{\bar{e}_r}(s)$ *și unde* $\mu_{\bar{e}_i}(s) = \delta_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\delta_i(s)$ *fiind factorii invarianți ai matricii polinomiale* $sI - A$, *numiți și factorii invarianți ai matricii (sau transformării)* A*).

COROLARUL 1. Polinomul minimal $\mu(s)$ este egal cu $\mu_{\bar{e}_r}(s)$, cu alte cuvinte, există un vector $\bar{e}_r \in \mathbb{R}^n$ al cărui polinom minimal este egal cu polinomul minimal al lui $\mathbb{R}^n$ relativ la A sau al lui A.

Într-adevăr, întrucît $\mu_{\bar{e}_r}(s)$ conține ca factori $\mu_{\bar{e}_1}(s), \ldots \mu_{\bar{e}_{r-1}}(s)$ iar orice $x \in \mathbb{R}^n$ se scrie $x = p_1(A)\bar{e}_1 + \ldots + p_r(A)\bar{e}_r$ rezultă imediat că $\mu_{\bar{e}_r}(A)x = 0$ deci $\mu(s) \mid \mu_{\bar{e}_r}(s)$. Dar $\mu(A)\bar{e}_r = 0$ deci $\mu_{\bar{e}_r}(s) \mid \mu(s)$, de unde $\mu_{\bar{e}_r}(s) = \mu(s)$.

COROLARUL 2. Dacă $\chi(s)$ este polinomul caracteristic al matricii A (notat uneori și $\chi_A(s)$) atunci $\chi(s) = \delta_1(s) \ldots \delta_r(s)$. De asemenea, $\mu(s) \mid \chi(s)$, unde $\mu(s)$ este polinomul minimal și care are aceiași factori ireductibili ca și $\chi(s)$. În fine, $\chi(A) = 0$ (teorema Cayley-Hamilton).

Într-adevăr, $\chi(s) = |sI - A| = |U(s)| \cdot |\Lambda(s)| \cdot |V(s)|$, unde $\Lambda(s)$ este forma diagonal canonică, iar $U(s)$ și $V(s)$ sînt unimodulare. Cum $|\Lambda(s)| = \delta_1(s) \ldots \delta_r(s)$ este monic, iar $\chi(s)$ este, de asemenea, monic ($\Gamma_c[sI - A] = I$), rezultă că $\chi(s) = \delta_1(s) \ldots \delta_r(s) = \delta_1(s) \ldots \delta_{r-1}(s) \cdot \mu(s)$. Se vede de aici că $\mu(s) \mid \chi(s)$, iar din faptul că $\delta_1(s) \mid \ldots \mid \delta_{r-1}(s) \mid \mu(s)$, rezultă imediat că $\chi(s)$ și $\mu(s)$ au aceiași factori ireductibili. În fine, $\chi(A) = \delta_1(A) \ldots \delta_{r-1}(A)\ \mu(A) = 0$.

DEFINIȚIA 1. O $n \times n$ matrice este *ciclică* dacă $\mathbb{R}^n_A$ este ciclic, adică există (generatorul) $e \in \mathbb{R}^n$ astfel încît

$$\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e.$$

Adesea se mai spune și că perechea (A, e) este ciclică.

Avem imediat,

PROPOZIȚIA 6. Fie A o $n \times n$ matrice și $\mu(s)$ polinomul ei minimal. Atunci A este ciclică dacă și numai dacă

$$\partial[\mu(s)] = n.$$

Demonstrație. Presupunem A ciclică. Atunci din propoziția 3 rezultă imediat că $\partial[\mu(s)] = n$. Reciproc, fie $\partial[\mu(s)] = n$ conform corolarului 1 există $e \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $\mu(s) = \mu_e(s)$. Fie $X_e = \mathbb{R}[A]e$. Atunci conform propoziției 3 $\dim_{\mathbb{R}} X_e = \partial[\mu_e(s)]$ adică $\dim_{\mathbb{R}} X_e = n$, deci $X_e = \mathbb{R}^n$.

---

*) Aceștia nu se schimbă la o transformare de coordonate $\hat{x} = Tx$, adică A și $\hat{A} = TAT^{-1}$ au aceiași factori invarianți.

Scanned with OKEN Scanner

Fie (A, e) ciclică. Atunci $e, Ae, \ldots, A^{n-1}e$ este o bază a lui $\mathbb{R}^n$. Fie $\mu(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n$ polinomul minimal.
Fie, de asemenea, matricea nesingulară T definită de

$$T^{-1} = [e\ Ae\ .\ .\ .\ A^{n-1}e]$$

şi fie transformarea în $\mathbb{R}^n$, $\hat{x} = Tx$. Atunci A devine $\hat{A} = TAT^{-1}$, adică

$$\hat{A} = T[Ae \mid A^2e \mid \ldots A^{n-1}e \mid A^ne],$$

Dar întrucît $\mu(A)e = 0$ rezultă

$$A^ne = -\alpha_0 e - \alpha_1 Ae - \ldots - \alpha_{n-1}A^{n-1}e.$$

Deci

$$\hat{A} = T[Ae \mid A^2e \mid \ldots \mid A^{n-1}e \mid -\alpha_0 e - \alpha_1 Ae - \ldots - \alpha_{n-1}A^{n-1}e] =$$

$$= T[Ae \mid A^2e \mid \ldots \mid A^{n-1}e \mid T^{-1}\begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

iar

$$\hat{e} = Te = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma matricii $\hat{A}$ de mai sus, sau forma lui $\hat{A}^T$, se numeşte *companion matricial*, ataşat polinomului $\mu(s)$.
Avem, aşadar

Teorema 2. *Dacă A este ciclică, există T nesingulară, astfel încît $\hat{A} = TAT^{-1}$ este în forma de companion matricial, sau altfel spus, există o bază în care matricea asociată endomorfismului A este în forma de companion.*

Un calcul imediat, facilitat de forma lui $\hat{A}$ (sau $\hat{A}^T$), arată că polinomul caracteristic al matricii $\hat{A}$, deci şi a lui A, este $\chi(s) = |sI - \hat{A}| = \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n$. Rezultă de aici şi din propoziţia 5 că *A este ciclică dacă şi numai dacă $\chi(s) = \mu(s)$.*

Fie $n \times n$ matricea A ciclică cu polinomul minimal de forma $\mu(s) = \nu(s)^k$, unde $\nu(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_{q-1}s^{q-1} + s^q$ şi fie e generatorul lui $\mathbb{R}^n_A(\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]\,e)$. Evident $kq = n$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie următorii n vectori definiţi prin

$$e_1 = \nu(A)^{k-1}e,\ e_2 = A\nu(A)^{k-1}e,\ \ldots,\ e_q = A^{q-1}\nu(A)^{k-1}e$$

$$e_{q+1} = \nu(A)^{k-2}e,\ e_{q+2} = A\nu(A)^{k-2}e,\ \ldots,\ e_{2q} = A^{q-1}\nu(A)^{k-2}e$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_{(k-1)q+1} = e,\ e_{(k-1)q+2} = Ae,\ \ldots,\ e_{kq} = A^{q-1}e.$$

Să arătăm că aceşti vectori formează o bază în $\mathbb{R}^n$. Pentru aceasta, se observă că $e_i = p_i(A)e$, unde $\partial[p_i(s)] < n$ şi $\partial[p_i(s)] \neq \partial[p_j(s)]$, $i \neq j$. Presupunem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nu toţi nuli astfel încît $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$. Fie $p(s) = \lambda_1 p_1(s) + \ldots + \lambda_n p_n(s)$ care este nenul întrucît, conform celor de mai sus, cel puţin un λ_i este nenul iar gradele polinoamelor $p_i(s)$ sînt diferite două cîte două. Atunci rezultă $p(A)e = 0$, deci $\mu(s) \mid p(s)$, ceea ce însă este absurd, deoarece $\partial[p(s)] < n$.

Fie acum matricea nesingulară T definită de

$$T^{-1} = [e_1\ e_2 \ldots e_n]$$

şi fie transformarea în $\mathbb{R}^n$, $\hat{x} = Tx$. Atunci

$$\hat{A} = TAT^{-1} = T[Ae_1, Ae_2 \ldots Ae_n] =$$

$$= T[e_2 \ldots e_q\ Ae_q \mid e_{q+2} \ldots e_{2q}\ Ae_{2q} \mid \ldots \mid e_{(k-1)q+2} \ldots e_{kq}\ Ae_{kq}].$$

Dar

$$0 = \nu(A)^k e = \beta_0 \nu(A)^{k-1}e + \beta_1 \nu(A)^{k-1}Ae + \ldots + \nu(A)^{k-1}A^q e =$$

$$= \beta_0 e_1 + \beta_1 e_2 + \ldots + \nu(A)^{k-1}A^q e$$

de unde

$$Ae_q = A^q \nu(A)^{k-1}e = -\beta_0 e_1 - \beta_1 e_2 - \ldots - \beta_{q-1}e_q.$$

Acum

$$e_{\tilde{1}} = \nu(A)^{k-1}e = \beta_0 \nu(A)^{k-2}e + \beta_1 \nu(A)^{k-2}Ae + \ldots + \nu(A)^{k-2}A^q e =$$

$$= \beta_0 e_{q+1} + \beta_1 e_{q+2} + \ldots + \nu(A)^{k-2}A^q e$$

de unde

$$Ae_{2q} = A^q \nu(A)^{k-2}\, e = e_1 - \beta_0 e_{q+1} - \beta_1 e_{q+2} - \ldots - \beta_{q-1}e_{2q}$$

şi aşa mai departe, iterînd procedura, rezultă în final:

$$Ae_{kq} = e_{(k-2)q+1} - \beta_0 e_{(k-1)q+2} - \ldots - \beta_{q-1}e_{kq}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci rezultă imediat $k \times k$ bloc matricea

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} C & J & & & \\ & C & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & J \\ & & & & C \end{bmatrix}$$

unde C este $(q \times q)$ companionul matricial atașat polinomului $\nu(s)$ iar J este $q \times q$ matrice nulă, exceptînd poziția $(1, q)$ ocupată de 1.

Matricea $\hat{A}$ de mai sus se numește *celulă* Jordan *atașată polinomului* $\nu(s)^k$.

Avem atunci

TEOREMA 3. *Fie A ciclică cu polinomul minimal $\mu(s) = \nu(s)^k$. Atunci există o transformare nesingulară T astfel încît $\hat{A} = TAT^{-1}$ este o celulă Jordan atașată polinomului $\nu(s)^k$.*

Două cazuri particulare sînt interesante:

Cazul $\nu(s)^n = (\alpha + s)^n$, matricea $\hat{A}$ fiind

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & 1 \\ & & & & -\alpha \end{bmatrix}$$

adică „cunoscuta" celulă Jordan obișnuită sau *celulă* Jordan *simplă* și

Cazul $\nu(s)^k = (\alpha + \beta s + s^2)^k$ $(2k = n)$, matricea $\hat{A}$ fiind

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc|cc||cc|cc} 0 & -\alpha & 0 & 1 & & & & \\ 1 & -\beta & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & 0 & -\alpha & & & & \\ & & 1 & -\beta & & & & \\ \hline & & & & 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ & & & & 1 & -\beta & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 0 & -\alpha \\ & & & & & & 1 & -\beta \end{array}\right]$$

adică celula Jordan utilizată de regulă pentru „rădăcinile complex conjugate".

Să considerăm acum A ciclică, deci există $e \in \mathbb{R}^n$, astfel încît $\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e$, adică $\mathbb{R}[A]$ — modulul $\mathbb{R}^n_A$ este ciclic. Fie $\mu(s)$ polinomul minimal al lui A (evident $\mu(s) = \mu_e(s)$), descompus într-un produs de polinoame relativ prime două cîte două, adică

$$\mu(s) = \mu_1(s)\,\mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$$

unde c.m.m.d.c. $\{\mu_i(s), \mu_j(s)\} = 1$, $\forall i \neq j$, adică nu au rădăcini comune.

Introducem polinoamele

$$\nu_i(s) = \mu_1(s)\,\mu_2(s) \ldots \mu_{i-1}(s)\,\mu_{i+1}(s) \ldots \mu_m(s), \quad i = 1, \; 2, \ldots, m.$$

Evident, c.m.m.d.c. $\{\nu_1(s), \nu_2(s), \ldots, \nu_m(s)\} = 1$.
Atunci există polinoamele $p_1(s), p_2(s), \ldots, p_m(s)$, astfel încît

$$p_1(s)\,\nu_1(s) + \ldots + p_m(s)\,\nu_m(s) = 1$$

deci sigur

$$p_1(A)\,\nu_1(A) + \ldots + p_m(A)\,\nu_m(A) = I. \tag{9}$$

Fie acum $x \in \mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e$, deci există $p(A) \in \mathbb{R}[A]$, astfel încît $x = p(A)e$. Se poate scrie atunci, conform cu (9).

$$x = p(A)\,(p_1(A)\,\nu_1(A) + \ldots + p_m(A)\,\nu_m(A))\,e. \tag{10}$$

Introducem vectorii din $\mathbb{R}^n$

$$e_i \overset{\Delta}{=} \nu_i(A)e, \; i = 1, \ldots, m \tag{11}$$

şi notăm

$$q_i(A) = p(A)p_i(A), \; i = 1, \ldots, m.$$

Atunci (10) devine

$$x = q_1(A)e_1 + \ldots + q_m(A)e_m$$

adică $e_1, \ldots, e_m$ sînt un sistem de generatori ai modulului $\mathbb{R}[A]e$, sau încă

$$\mathbb{R}[A]e = \mathbb{R}[A]e_1 + \ldots + \mathbb{R}[A]e_m. \tag{12}$$

Să arătăm acum că (12) este o sumă directă. Pentru aceasta, fie

$$x = q_1(A)e_1 + \ldots + q_m(A)e_m = 0. \tag{13}$$

Întrucît $\mu_1(s)$ şi $\nu_1(s) = \mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$ sînt relativ prime există $a(s)$ şi $b(s) \in \mathbb{R}[s]$ astfel încît

$$a(s)\,\mu_1(s) + b(s)\,\nu_1(s) = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$a(A)\,\mu_1(A) + b(A)\,\nu_1(A) = I. \tag{14}$$

Atunci din (11)

$$q_1(A)e_1 = q_1(A)\,\nu_1(A)e =$$

$$= q_1(A)\,(I - a(A)\mu_1(A))\nu_1(A)e$$

deoarece $\mu_1(A)\nu_1(A)e = \mu(A)e = 0$. Aşadar

$$q_1(A)e_1 = (I - a(A)\,\mu_1(A))\,q_1(A)e_1$$

iar din (13) şi (14) rezultă

$$q_1(A)e_1 = b(A)\nu_1(A)\,(-q_2(A)e_2 - \ldots - q_m(A)e_m)$$

$$= b(A)\,\nu_1(A)\,(-q_2(A)\,\nu_2(A) - \ldots - q_m(A)\nu_m(A))e.$$

Cum $\nu_1(A)\nu_2(A), \nu_1(A)\nu_3(A), \ldots, \nu_1(A)\nu_m(A)$ conţin sigur pe $\mu(A)$, rezultă că expresia de mai sus este nulă, adică $q_1(A)e_1 = 0$. Analog rezultă $q_2(A)e_2 = \ldots = q_m(A)e_m = 0$. Aşadar (12) este sumă directă, adică

$$\mathbb{R}[A]e = \mathbb{R}[A]e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]e_m.$$

În fine, $\mu_i(A)e_i = \mu_i(A)\nu_i(A)\,e = \mu(A)\,e = 0$, deci $\mu_{e_i}(s) \mid \mu_i(s)$.

Dar $0 = \mu_{e_i}(A)e_i = \mu_{e_i}(A)\nu_i(A)e$. Deci $\mu(s) \mid \mu_{e_i}(s)\nu_i(s)$, adică $\mu_i(s) \mid \mu_{e_i}(s)$. Deci $\mu_i(s) = \mu_{e_i}(s)$.

Avem atunci, din cele de mai sus.

TEOREMA 4. *Dacă $n \times n$ matricea A este ciclică, adică există $e \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e$, iar polinomul minimal $\mu(s)$ al lui A este factorizat în $\mu(s) = \mu_1(s) \ldots \mu_m(s)$ cu $\mu_i(s)$ şi $\mu_j(s)$ coprime pentru $i \neq j$, atunci există $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{R}^n$, astfel încît*

$$\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e = \mathbb{R}[A]e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]e_m$$

şi unde

$$\mu_{e_i}(s) = \mu_i(s),\ i = 1,2, \ldots, m.$$

COROLARUL 3. Fie $\mu(s)$ polinomul minimal al matricei A factorizat în $\mu(s) = \pi_1(s) \cdot \pi_2(s) \ldots \pi_t(s)$, unde $\pi_i(s)$ şi $\pi_j(s)$ sînt coprime, *adică nu au rădăcini comune*, pentru $i \neq j$. Fie

$$X_i \triangleq \operatorname{Ker} \pi_i(A), \quad i = 1,2, \ldots, t$$

Atunci

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus \ldots \oplus X_t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, fie $\delta_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ factorii invarianți ai matricei A, unde $\delta_1(s) | \ldots | \delta_r(s) = \mu(s)$. Renotăm factorizarea lui $\mu(s)$ prin $\delta_r(s) = \pi_{r1}(s) \cdot \pi_{r2}(s) \ldots \pi_{rt}(s)$. Atunci, întrucît $\delta_1(s) | \ldots | \delta_i(s) | \ldots | \delta_r(s)$, avem și factorizările $\delta_i(s) = \pi_{i1}(s) \cdot \pi_{i2}(s) \ldots \pi_{it}(s)$, unde $\pi_{1j}(s) | \ldots | \pi_{ij}(s) | \ldots | \pi_{rj}(s)$ cu $j = 1, 2, \ldots, t$ și unde unele polinoame $\pi_{ij}(s)$, pentru $i < r$, pot fi egale cu 1. De asemenea $\pi_{ij}(s)$ coprim cu $\pi_{ik}(s)$, $j \neq k$ dacă $\pi_{ij}(s)$, $\pi_{ik}(s) \neq 1$. Atunci din teorema 1, $\mathbb{R}^n_A = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{R}[A]\bar{e}_i$ cu $\mu_{\bar{e}_i}(s) = \delta_i(s)$, iar din teorema 4, $\mathbb{R}[A]\bar{e}_i = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathbb{R}[A]e_{ij}$ cu $\mu_{e_{ij}}(s) = \pi_{ij}(s)$ și unde evident $\mathbb{R}[A]e_{ij} = 0$ dacă $\pi_{ij}(s) = 1$.

Așadar, $\mathbb{R}^n_A = \overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathbb{R}[A]e_{ij}$. Punem $\tilde{X}_j = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{R}[A]e_{ij}$.

Atunci $\mathbb{R}^n_A = \overset{t}{\underset{j=1}{\oplus}} \tilde{X}_j$. Se vede imediat din modul cum a fost construit $\tilde{X}_j$ că $\pi_{rj}(A)\, x = 0$, adică $\pi_j(A)\, x = 0$, pentru orice $x \in \tilde{X}_j$ deci, $\tilde{X}_j \subset \subset \operatorname{Ker} \pi_j(A) = X_j$. Fie acum $x \in X_j$ care se reprezintă unic prin $x = x_j + \bar{x}_j$, $x_j \in \tilde{X}_j$ și $\bar{x}_j \in \overset{}{\underset{i \neq j}{\oplus}} \tilde{X}_i$. Atunci $0 = \pi_j(A)x = \pi_j(A)x_j + \pi_j(A)\,\bar{x}_j = \pi_j(A)\,\bar{x}_j$. Deci $\pi_j(s)$ este un anulator al lui $\bar{x}_j$ și în consecință $\pi_j(s) | \prod_{i \neq j} \pi_i(s)$ unde $\prod_{i \neq j} \pi_i(s)$ este polinomul minimal relativ la A al lui $\overset{}{\underset{i \neq j}{\oplus}} \tilde{X}_i$, ceea ce este absurd. Așadar, $\bar{x}_j = 0$ și deci $X_j \subset \tilde{X}_j$, adică $\tilde{X}_j = X_j$, corolarul fiind complet demonstrat.

Considerăm acum că $\mu(s)$ în teorema 4 este factorizat *în factori ireductibili peste* $\mathbb{R}$, adică

$$\mu(s) = \nu_1(s)^{k_1} \cdot \nu_2(s)^{k_2} \ldots \nu_q(s)^{k_q}$$

unde $\nu_i(s)$ sînt polinoame de gradul 1 sau 2 după cum rădăcinile lui $\mu(s)$ sînt reale sau complex conjugate, k_i fiind ordinele corespunzătoare de multiplicitate. Evident, $\nu_i(s)$, $\nu_j(s)$ sînt coprime cu $i \neq j$.

În acest caz, suma directă din teorema 4 este o *sumă directă de module indecompozabile*. Într-adevăr, fie, de exemplu, sumandul $\mathbb{R}[A]e_i$, unde $\mu_{e_i}(s) = (s+\lambda_i)^{k_i}$ dacă $-\lambda_i$ este rădăcină reală, sau $\mu_{e_i}(s) = (s^2 + \beta_i s + \alpha_i)^{k_i}$, dacă rădăcinile sînt complex conjugate. Să considerăm primul caz. Presupunem că $\mathbb{R}[A]e_i = X \oplus Y$. Atunci e_i se scrie unic $e_i = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$. Cum $\mathbb{R}[A]\,x \subset X$ și $\mathbb{R}[A]y \subset Y$, iar $\mathbb{R}[A]e_i = \mathbb{R}[A]x + \mathbb{R}[A]y$, rezultă că $\mathbb{R}[A]e_i = \mathbb{R}[A]x \oplus \mathbb{R}[A]y$. Fie $\mu_x(s)$ și $\mu_y(s)$ polinoamele minimale ale lui x respectiv y. Atunci, evident $\mu_{e_i}(s) = \text{c.m.m.m.c.}\{\mu_x(s), \mu_y(s)\}$, deci sigur, ținînd cont de expresia lui $\mu_{e_i}(s)$, $\mu_x(s) = (s+\lambda_i)^{r_i}$, $\mu_y(s) = (s+\lambda_i)^{t_i}$ unde sau r_i sau t_i este egal cu k_i și atunci celălalt exponent este mai mic sau egal. Fie $r_i = k_i$ și $t_i \leqslant k_i$. Conform propoziției 3, $\dim_{\mathbb{R}} X = k_i$ și $\dim_{\mathbb{R}} Y = t_i$, deci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[A]e_i = k_i + t_i$. Înseamnă că $t_i = 0$, deci $\dim_{\mathbb{R}} X = k_i$ și $\dim_{\mathbb{R}} Y = 0$, adică $\mathbb{R}[A]e_i = X$ și $Y = 0$. Adică $\mathbb{R}[A]e_i$ *nu se mai poate descompune*. Analog se face demonstrația dacă $\mu_{e_i}(s)$ este trinom de gradul 2 cu rădăcini complex conjugate.

Fie acum descompunerea din teorema 1 și fie $\delta_i(s)$ factorizat în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$,

$$\delta_i(s) = \nu_{i1}(s)^{k_{i1}} \ldots \nu_{imi}(s)^{k_{imi}}. \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform teoremei 4, întrucît $\nu_{ij}(s)$ și $\nu_{ik}(s)$ sînt coprime, $j \neq k$, se obține pentru modulul ciclic $\mathbb{R}[A]\bar{e}_i$ descompunerea în sumă directă de submodule indecompozabile

$$\mathbb{R}[A]\bar{e}_i = \mathbb{R}[A]\bar{e}_{i1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_{im_i} \tag{16}$$

unde $\mu_{\bar{e}_{ij}}(s) = \nu_{ij}(s)^{k_{ij}}$, $j = 1,2,\ldots, m_i$. Considerînd (15) și (16) pentru fiecare $i = 1,2,\ldots, r$, rezultă

$$\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]\bar{e}_{11} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_{1m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_{r1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]\bar{e}_{rm_r}$$

ca *sumă directă de submodule ciclice indecompozabile.* Întrucît $\delta_1(s) \mid \ldots \ldots \mid \delta_r(s)$, evident unele polinoame $\nu_{ij}(s)$, se repetă, adică, de exemplu, $\nu_{11}(s)$ se găsește singur și în factorizarea lui $\delta_r(s)$. Polinoamele $\nu_{ij}(s)^{k_{ij}}$, $i = 1,2, \ldots r$, $j = 1,2,\ldots, m_i$ se numesc *divizorii elementari* ai modulului $\mathbb{R}^n_A$ sau ai matricii A*). Avem atunci

Teorema 5. *Fie A o $n \times n$ matrice. Atunci $\mathbb{R}^n_A$ se descompune într-o sumă directă de submodule ciclice indecompozabile,*

$$\mathbb{R}^n_A = \mathbb{R}[A]e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}[A]e_s$$

unde $\mu_{e_i}(s)$ sînt egali cu divizorii elementari ai matricii A.

Cu dezvoltările de mai sus abordăm,

Reprezentările canonice ale matricii A.

1. *Forma canonică bloc companion diagonală*

Fie descompunerea lui $\mathbb{R}^n_A$ (sau descompunerea lui $\mathbb{R}^n$) din teorema 1 în sumă directă de submodule ciclice (subspații A-invariante) $\mathbb{R}^n_A = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{R}[A]\bar{e}_i$ cu $\mu_{\bar{e}_i}(s) = \delta_i(s)$ factorii invarianți ai matricii A și unde $\partial[\delta_i(s)] = q_i$ $(\geqslant 1)$, $i = 1,2,\ldots, r$.

Atunci, evident, conform propoziției 3, familia de vectori $\mathcal{F}_i = \{\bar{e}_i, \ldots, A^{q_i-1}\bar{e}_i\}$ formează o bază peste $\mathbb{R}$ pentru subspațiul A-invariant $\mathbb{R}[A]\bar{e}_i$. Datorită descompunerii în sumanzi direcți a lui $\mathbb{R}^n_A$, $\overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{F}_i$ formează o bază pentru $\mathbb{R}^n$. Fie atunci matricea nesingulară T definită prin

$$T^{-1} = [\bar{e}_1 \ldots A^{q_1-1}\bar{e}_1 \mid \ldots \mid \bar{e}_r \ldots A^{q_r-1}\bar{e}_r]$$

și fie transformarea $\hat{x} = Tx$ a lui $\mathbb{R}^n$. Atunci din teorema 2 și teorema 1 rezultă imediat că

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_r \end{bmatrix}$$

unde C_i sînt $q_i \times q_i$ companioanele matriciale atașate factorilor invarianți $\delta_i(s)$. Forma canonică de mai sus se numește *bloc companion diagonală.* De asemenea

$$\hat{\bar{e}}_i = T\bar{e}_i = \operatorname{col}(0, 0, \ldots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \ldots 0)$$
$$q_1+\ldots+q_{i-1}+1$$

*) Aceștia nu se schimbă la o transformare de coordonate $\hat{X} = Tx$, adică A și $\hat{A} = TAT^{-1}$ au aceiași divizori elementari.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Forma canonică Jordan*

Fie acum descompunerea din teorema 5, $\mathbb{R}^n_A = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{R}[A]e_i$ unde $\mathbb{R}[A]e_i$ sînt submodule ciclice indecompozabile și unde $\mu_{e_i}(s) = \nu_i(s)^{k_i}$, $i = 1,2,\ldots,s$ sînt divizorii elementari ai lui A (reindexați cu un singur indice).

Fie pentru simplitate $\nu_i(s)^{k_i} = (s + \alpha_i)^{k_i}$. Atunci conform teoremei 3, familia de vectori $\mathcal{F}_i = \{(A + \alpha_i I)^{k_i-1}e_i, (A+\alpha_i I)^{k_i-2}e_i, \ldots, e_i\}$ formează o bază peste $\mathbb{R}$ pentru subspațiul ciclic A-invariant $\mathbb{R}[A]e_i$. Datorită descompunerii în sumanzi direcți ai lui $\mathbb{R}^n_A$, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{F}_i$ formează o bază (peste $\mathbb{R}$) pentru $\mathbb{R}^n$. Fie atunci matricea nesingulară T definită de

$$T^{-1} = [(A + \alpha_1 I)^{k_1-1}e_1 \ldots e_1 \mid \ldots \mid (A + \alpha_s I)^{k_s-1}e_s \ldots e_s]$$

și transformarea $\hat{x} = Tx$. Atunci, din teorema 3 și teorema 5 rezultă imediat că

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

unde J_i sînt celule Jordan atașate divizorilor elementari $\nu_i(s) = (s + \alpha_i)^k$ deci sînt $k_i \times k_i$ matrice de tipul

$$J_i = \begin{bmatrix} -\alpha_i & 1 & & & \\ & -\alpha_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & -\alpha_i \end{bmatrix}$$

Dacă acum considerăm și cazul existenței divizorilor elementari cu rădăcini complex conjugate, de exemplu, un $\nu_j(s) = (s^2 + \beta_j s + \alpha_j)^{k_j}$ atunci conform teoremei 3 celula Jordan corespunzătoare este $2k_j \times 2k_j$ matricea

$$J_j = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc|cc} 0 & -\alpha_j & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & -\beta_j & 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & 0 & -\alpha_j & & & & & \\ & & 1 & -\beta_j & & & & & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots} & \vdots & \multicolumn{2}{c|}{\cdots\cdots} & \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots} \\ \hline & & & & & 0 & -\alpha_j & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & -\beta_j & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & 0 & -\alpha_j \\ & & & & & & & 1 & -\beta_j \end{array}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

și unde acum $\mathcal{F}_j = \{(A^2 + \beta_j A + \alpha_j I)^{k_j-1} e_j, (A^2 + \beta_j A + \alpha_j I)^{k_j-1} A e_j, (A^2 + \beta_j A + \alpha_j I)^{k_j-2} e_j, (A^2 + \beta_j A + \alpha_j I)^{k_j-2} A e_j, \ldots, e_j, A_j e_j\}$ formează o bază peste $\mathbb{R}$, pentru subspațiul ciclic A-invariant $\mathbb{R}[A]e_j$, matricea T^{-1} modificîndu-se adecvat.

Observația 1. Întreaga dezvoltare de mai sus se face identic pentru $\mathbb{C}^n$, $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}[A]$; în acest caz, divizorii elementari ai matricei A sînt toți de forma $(s+a_i)^{k_i}$, $a_i \in \mathbb{C}$ și în consecință, forma canonică Jordan a matricei A *conține numai celule* Jordan *simple.*

TEOREMA 6. *Dacă*

$$sI - \bar{A} = M(s)\,(sI - A)\,N(s) \tag{17}$$

cu $M(s)$, $N(s)$ *matrici unimodulare, atunci*

$$sI - \bar{A} = M_0(sI - A)\,N_0 \tag{18}$$

cu M_0, N_0 *matrice constante, unde*

$$N_0 = M_0^{-1} \tag{19}$$

și

$$M(s) = (sI - \bar{A})\,M_1(s) + M_0 \tag{20}$$

$$N(s) = N_1(s)\,(sI - \bar{A}) + N_0. \tag{21}$$

Demonstrație. Reprezentînd ca sumă unică dintre cît și partea strict proprie $(sI-\bar{A})^{-1}M(s)$ și $N(s)(sI-\bar{A})^{-1}$ rezultă

$$(sI - \bar{A})^{-1}M(s) = M_1(s) + (sI - \bar{A})^{-1}M_0$$

$$N(s)\,(sI - \bar{A})^{-1} = N_1(s) + N_0(sI - \bar{A})^{-1}$$

unde din $1 = \partial_{ri}[sI - \bar{A}] > \partial_{ri}[M_0] = 0$, $i = 1, \ldots, n$ rezultă că M_0 este o matrice constantă. Analog pentru N_0. Eliminînd numitorii din ultimele două expresii rezultă (20) și (21). În mod analog pentru

$$\hat{M}(s) \triangleq M^{-1}(s)$$

scriem

$$\hat{M}(s) = (sI - A)\,\hat{M}_1(s) + \hat{M}_0.$$

Atunci

$$I = \hat{M}(s)\,M(s) = \hat{M}(s)\,((sI - \bar{A})M_1(s) + M_0) =$$

$$= \hat{M}(s)\,(sI - \bar{A})M_1(s) + ((sI - A)\,\hat{M}_1(s) + \hat{M}_0)\,M_0 =$$

$$= (sI - A)\,N(s)\,M_1(s) + (sI - A)\,\hat{M}_1(s)\,M_0 + \hat{M}_0 M_0$$

Scanned with OKEN Scanner

unde în ultima egalitate s-a utilizat (16) scrisă în forma

$$\hat{M}(s)\,(sI - \bar{A}) = (sI - A)\,N(s).$$

Avem atunci

$$(sI - A)^{-1}(I - \hat{M}_0 M_0) = N(s)\,M_1(s) + \hat{M}_1(s)\,M_0$$

cum membrul stîng este strict propriu, cîtul nu poate fi decît zero, adică $N(s)M_1(s) + \hat{M}_1(s)M_0 = 0$ și deci

$$\hat{M}_0 M_0 = I$$

ceea ce arată că M_0 este nesingulară.

Din (17) scriem acum

$$N(s)\,(sI - \bar{A})^{-1} = (sI - A)^{-1}\,\hat{M}(s)$$

adică descompus

$$N_1(s) + N_0(sI - \bar{A})^{-1} = \hat{M}_1(s) + (sI - A)^{-1}\,\hat{M}_0.$$

Identificînd cîturile și părțile strict proprii avem

$$N_0(sI - \bar{A})^{-1} = (sI - A)^{-1}\,\hat{M}_0$$

rezultînd că N_0 este nesingulară (M_0 este nesingulară). De unde inversînd ambii membrii rezultă (18) și (19).

Bibliografie

A1. I. D. Ion, N. Radu, *Algebra*. Ed. didactică și pedagogică, 1975.
A2. F. R. Gantmaher, *Teoria matrițt*. Izd. Nauka, Moskva, 1966.
A3. S. Lang, *Algebra*, Addison–Wisley, 1965.

Scanned with OKEN Scanner

Structural synthesis of linear systems

The purpose of the book is to present a unified approach to the design objectives of linear systems and the appropriate techniques for solving them. The mathematical development is based exclusively on the algebraic theory of polynomial and rational matrices.

Chapter 1 reviews the general results in linear system theory such as : controllability, observability, feedback law, observers, etc., in terms of state space representations.

Chapter 2 deals with the general questions concerning polynomial system representations. The concept of state equivalent of a system polynomial matrix is introduced. Based on this notion the basic system properties expressed in terms of state space representations are converted in terms of transfer matrix factorizations and system matrix representations. Several modular techniques are also developed.

In *chapter 3* the tracking and regulation problem and the synthesis of linear regulator is treated. At the beginning the general compensation techniques for stabilizing linear systems are developed. Further, the internal model principle is investigated in terms of polynomial matrix representations. The natural culmination of the chapter is represented by a general synthesis procedure of structurally stable regulators. The questions related to the notion of robustness are also approached.

In *chapter 4* the system invertibility and related topics are studied. The mathematical instrumentation is based on the notions of "reproducer" and "nullator". A general theory of proper and stable solutions of rational matrix equations is developed.

In *chapter 5* a complete treatment of the model matching problem (MMP) is made. New solvability criteria for MMP and some useful characterizations of the class of all transfer matrix solutions to MMP are presented. Further, the problem of implementing any given open loop solution to MMP via minimal input dynamics and linear state variable feedback is solved. The closed loop stability questions are investigated and a procedure for choosing a "good" model which can be matched by a stable closed loop configuration is presented. A discussion regarding the fixed poles of minimal solutions to MMP is also made.

Chapter 6 deals with the problem of noninteracting control i. e. to obtain output block decoupling. Using a compensation technique based on the notion of minimal P-nullator introduced in chapter 4, a reduced bound for input dynamics is achieved which turns out to be strictly minimal if the number of independent control inputs is equal to the number of output blocks to be decoupled. This technique is simpler than that based on the radical of a family of linear subspaces.

An *appendix* contains an in-depth study of polynomial and rational matrix algebra.

Many examples and exercises are also included in the text.

Scanned with OKEN Scanner

Contents

Introduction 7

Chapter 1. State space representations 11

1.1 Linear systems. General considerations. 11
1.2 Controllability. Observability 15
1.3 Control law. 16
1.4 Canonical forms. 17
1.5 Stability and stabilizability 20
1.6 Dynamic observers. 20
References 23

Chapter 2. Polynomial matrix representations 25

2.1 Polynomial matrix representations in state form 25
2.2 Polinomial matrix representations in partial state form 29
2.3 Output controllability 48
References 50

Chapter 3. Synthesis of linear regulators 51

3.1 Stabilization techniques via combined control law and dynamic observers. 51
3.2 Output stabilization via compensation techniques. 63
3.3 Tracking and regulation problem. 71
References 83

Chapter 4. Inversion of linear systems. 85

4.1 System domain characterization. The reproducer. 85
4.2 Nul space characterization. The nullator. 96
4.3 Standard reproducer. 100
References 111

Chapter 5. Exact model matching 113

5.1 Model matching via series compensation. 113
5.2 Minimal design problem. 116
5.3 Fixed poles. 121
5.4 Model matching and dynamic observers. 128
5.5 Model matching in closed loop configuration. 135
References 147

Chapter 6. Decoupling of linear systems 149

6.1 Decoupling problem. 149
6.2 Particular cases of decoupling problem. 152

Scanned with OKEN Scanner

6.3 Decoupling and open loop stabilization. 155
6.4 Closed loop decoupling and pole assignment. 157
6.5 Decoupling by linear state variable feedback. 171

References 180

Appendix **Complements of algebra** 181

A1. Elements of algebraic structures 181
A2. Theory of polynomial and rational matrices. 195
A3. Invariant subspaces. 223

References 240

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: ing. LIA CREȚOIU
Tehnoredactor: SILVIA DEOCLIȚEAN

Bun de tipar 22 X 1979. Tiraj 2 840.
Format 16/70 × 100. Coli de tipar 15,25.
C.Z. pentru biblioteci mari și mici:
621—501·1

c. 145 — I. P. Informația,
str. Brezoianu nr. 23—25,
București

Scanned with OKEN Scanner

302

Lei 13 255224

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZA STRUCTURALĂ A SISTEMELOR LINIARE

de prof. dr. ing. ***VLAD IONESCU*** *dorește să pună la îndemîna celor interesați în progresele științei sistemelor un material unitar, alcătuit, pe de-o parte pe rezultatele originale ale autorului, iar pe de altă parte, pe informația la zi a cercetărilor pe plan mondial în domeniul sintezei sistemelor liniare.*

Cartea se adresează specialiștilor în teoria sistemelor, inginerilor din domeniul proiectării sistemelor automate și de conducere cu calculator a proceselor industriale, doctoranzilor și studenților în specialitatea automatică și calculatoare.

Din sumar:

— Reprezentări de stare
— Reprezentarea polinomială a sistemelor
— Sinteza regulatoarelor
— Inversarea sistemelor
— Sinteza exactă
— Decuplarea sistemelor

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII
SOCIALISTE
ROMÂNIA